ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

Ευαγγελία Λάμπρου, Κων/νος Νικολίτσας
e-mail: litsal@central.ntua.gr

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο – Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών

Περίληψη

Ο σχεδιασμός ενός υψομετρικού δικτύου (ή δικτύου κατακορύφου ελέγχου) απαιτεί από τον γεωδαίτη να προεκτιμήσει τον αριθμό των κορυφών του, το σύνολο των μετρούμενων υψομετρικών διαφορών (ποιες συγκεκριμένα θα είναι αυτές) και τη μέθοδο μέτρησής τους που θα εξασφαλίσει την επιδιωκόμενη αβεβαιότητα.
Η βελτιστοποίηση του δικτύου, δηλαδή η a-priori εκτίμηση της αβεβαιότητας που μπορεί να επιτευχθεί, είναι εργασία καθοριστική, πάντοτε σημαντική και απαραίτητη ώστε να εξοικονομείται κόπος και χρόνος στη μέτρησή του.
Συνήθως η βελτιστοποίηση ενός υψομετρικού δικτύου πραγματοποιείται, χρησιμοποιώντας ως μαθηματικό μοντέλο αυτό που αποτελείται από τις εξισώσεις των υψομετρικών διαφορών που πρόκειται να μετρηθούν (εξισώσεις παρατήρησης). Υπολογίζεται a-priori η μέση αβεβαιότητα του δικτύου ως μέσος όρος του αθροίσματος των στοιχείων της διαγωνίου (ίχνος) του a-priori πίνακα μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας. Κάθε στοιχείο της διαγωνίου του πίνακα αυτού εκφράζει την a-priori αβεβαιότητα κάθε άγνωστου υψομέτρου, που δεν είναι το άμεσα μετρούμενο μέγεθος.
Η αβεβαιότητα αυτή εξαρτάται σημαντικά από τον a-priori καθορισμό της μονάδας βάρους.
Στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται μια διαδικασία προσομοίωσης της συνόρθωσης ενός υψομετρικού δικτύου χρησιμοποιώντας εξισώσεις συνθήκης. Οι εξισώσεις αυτές δημιουργούνται ακολουθώντας την αρχή ″το άθροισμα των υψομετρικών διαφορών ενός κλειστού υψομετρικού πολυγώνου (βρόγχου) είναι ίσο με μηδέν″.
Η δημιουργία του μαθηματικού μοντέλου του υψομετρικού δικτύου με τη βοήθεια των εξισώσεων συνθήκης καθιστά εφικτή την ολοκληρωμένη επίλυσή του χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo. Από τις πολλαπλές προσομοιώσεις των συνορθώσεων του δικτύου που πραγματοποιούνται, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να προεπιλέξει το συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο μορφής του δικτύου, το οποίο οδηγεί στην επίτευξη της απαιτούμενης (προδιαγεγραμμένης) αβεβαιότητας.
Στα πλεονεκτήματα της προτεινόμενης διαδικασίας καταγράφεται, ο προσδιορισμός της αβεβαιότητας κάθε μετρούμενης υψομετρικής διαφοράς, και κατόπιν της αβεβαιότητας του υψομέτρου κάθε κορυφής. Επίσης καθώς ολοκληρώνεται η ψευδοσυνόρθωση του δικτύου μπορεί να αξιολογηθεί η επιλογή της a-priori τιμής της μονάδας βάρους.
Επιπλέον η προτεινόμενη διαδικασία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την άμεση ανίχνευση χονδροειδούς σφάλματος σε κάποια μέτρηση (μετά το πέρας των μετρήσεων), όταν το σφάλμα υπερβαίνει την αναμενόμενη τιμή για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Λέξεις-Κλειδιά:
Υψομετρικό δίκτυο, βελτιστοποίηση, προσομοίωση συνόρθωσης, μέθοδος Monte Carlo.

Ευαγγελία Λάμπρου, Κων/νος Νικολίτσας.
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο – Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών.
Βελτιστοποίηση υψομετρικού δικτύου με προσομοιώσεις συνόρθωσης.

Abstract

OPTIMIZATION OF A VERTICAL NETWORK BY ADJUMENT'S SIMULATIONS

A vertical network design requires the estimation of the number of control points, the number of height differences to be measured, the choice of the specific levellings and the measurement method that will ensure the desired uncertainty.
The network optimization, namely the a-priori estimation of the uncertainty which can be achieved, is a crucial task and always necessary and important in order to save labor and time in the whole procedure.
Usually optimization of vertical network carries out by using a mathematical model consisting of the equations of the height differences which are going to be measured (observation equations). The a-priori average uncertainty of the network calculated as the average of the sum of the diagonal elements of the a-priori variance - covariance matrix. Each element of the diagonal of this matrix indicates the a-priori uncertainty of the final determined height. This uncertainty depends on the a-priori determination of the weight unit.
In this paper, a new process of adjustment's simulations of a vertical network is applied by using the conditional equations. These equations are generated by following the principle that "the sum of the height differences of a closed polygon is equal to zero".
The establishment of the mathematical model of vertical network by using conditional equations necessitates the integrated solution by using the Monte Carlo method. By the simulations of the network's adjustments, the user has the opportunity to choose the specific mathematical model of the network, which leads to the required (predefined) uncertainty.
The advantages of the proposed procedure are the determination of the uncertainty of each measured height difference, and eventually the uncertainty of the final height of each control point. Furthermore, the assessment of the a-priori choice of the weight unit could be done .
In addition, the proposed procedure can be used for the detection of gross errors during the measurements, when the error exceeds out of the expected one for a particular confidence level.

Key words: *Vertical network, optimization, simulation of the adjustment, Monte Carlo Method.*

1. Εισαγωγή

Η βελτιστοποίηση ενός υψομετρικού δικτύου παρέχει μια εκτίμηση της μέσης αβεβαιότητας που μπορεί να επιτευχθεί στον υπολογισμό των αγνώστων παραμέτρων. Αυτό εξαρτάται από τα όργανα και τις μεθόδους μέτρησης που θα χρησιμοποιηθούν, από τη γεωμετρία του δικτύου και τον αριθμό των μετρήσεων που θα πραγματοποιηθούν.
Η αύξηση του αριθμού των μετρήσεων έχει ως αποτέλεσμα να φθίνει η μέση αβεβαιότητα σ_0 του δικτύου έως ένα κρίσιμο σημείο καμπής, όπου η μορφή της καμπύλης (άξονας Y

αριθμός μετρήσεων, άξονας Χ – σ_0) γίνεται ασυμπωτική ως προς τον άξονα Χ. Το σ_0 δεν μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά πέραν του σημείου αυτού.

Καθοριστικός είναι ο ορισμός του a -priori σ_0 που οφείλει να είναι όσο το δυνατόν ρεαλιστικό, ώστε να παρέχεται από τη διαδικασία ένα εφικτό μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Η παραπάνω διαδικασία δεν παρέχει καμία πληροφορία για την επιδιωκόμενη ή την εφικτή αβεβαιότητα της κάθε υψομετρικής διαφοράς, προκειμένου να επιτευχτεί η επιθυμητή αβεβαιότητα στο τελικό αποτέλεσμα. Η πληροφορία αυτή θα ήταν πολύ χρήσιμη ώστε να ελέγχονται οι μετρήσεις στο πεδίο.

Η προσομοίωση της συνόρθωσης ενός υψομετρικού δικτύου με ένα στατιστικό εργαλείο όπως η μέθοδος Monte Carlo, παρέχει μια a-priori ολοκληρωμένη συνόρθωση ενός δικτύου με σκοπό την καλύτερη εκτίμηση των αβεβαιοτήτων των μετρούμενων υψομετρικών διαφορών αλλά και της συνολικής αβεβαιότητας του δικτύου.

Για την πραγματοποίηση της συνόρθωσης δημιουργούνται εξισώσεις συνθήκης τόσες όσα τα μοναδιαία κλειστά πολύγωνα του δικτύου. Τα πολύγωνα μορφοποιούνται ανάλογα με τις συνδέσεις των υψομετρικών αφετηριών δηλ. τις υψομετρικές διαφορές ΔH_i που σχεδιάζονται να μετρηθούν. Η αληθινή τιμή κάθε τέτοιας εξίσωσης είναι μηδέν, όσο το άθροισμα των υψομετρικών διαφορών ενός κλειστού πολύγωνου.

Για κάθε υψομετρική διαφορά ΔH_i υπολογίζεται ένα a-priori σφάλμα $\sigma_{\Delta Hi}$, ανάλογα με τα όργανα και τη μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί για τη μέτρησή της. Δημιουργείται έτσι ένας πινάκας w, κάθε στοιχείο του οποίου έχει την δυνατότητα να μεταβάλλεται με τυχαίες τιμές μεταξύ του μηδενός και του $\sigma_{\Delta Hi}$, σύμφωνα με κάποια κατανομή.

Είναι προφανές ότι όσες φορές οριστεί να γίνει η επανάληψη της διαδικασίας, δηλαδή της δημιουργίας του πίνακα w τόσα θα είναι και τα αποτελέσματα του υπολογισμού του τυπικού σφάλματος της συνόρθωσης.

Σύμφωνα με τις οδηγίες του BIMP [JCGM 100:2008, 2008] ο ικανοποιητικός αριθμός επαναλήψεων είναι 10^6 ή 10^7, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

Ο μεγάλος αριθμός των επαναλήψεων, δίνει τη δυνατότητα της αξιοποίησης του νόμου των μεγάλων αριθμών [James F., 1980] και με την παραδοχή ότι τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, παρέχεται η δυνατότητα του προσδιορισμού του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης των 10^6 ή των 10^7 εκτιμήσεων των τυπικών σφαλμάτων, σύμφωνα με την κατανομή που ακολουθούν.

Η επεξεργαστική ισχύς των ηλεκτρονικών υπολογιστών δίνει σήμερα τη δυνατότητα δεκάδων χιλιάδων επαναλήψεων σε ελάχιστα δευτερόλεπτα. Έτσι δημιουργείτε ο πίνακας w με ψευδοτυχαίους αριθμούς από κάποια καθορισμένη κατανομή. Η διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί σε περιβάλλον Matlab ή οποιοδήποτε άλλο αντίστοιχο.

Έτσι πραγματοποιούνται $N=10^7$ επαναλήψεις, πρακτικά άπειρες, της συνόρθωσης του δικτύου με υποθετικά μεταβαλλόμενες τιμές των ΔH_i που πρόκειται να μετρηθούν εντός του ορίου του a-priori σφάλματος κάθε ενός.

Από τις Ν αυτές συνορθώσεις προκύπτει ένα σ_o το όποιο υπολογίζεται ως η μέση τιμή από έναν πληθυσμό σ_{oi} = N και η αντίστοιχη αβεβαιότητά του ($\sigma_{\sigma o}$), σύμφωνα με την κατανομή που ακολουθεί ο πληθυσμός αυτός. Το είδος της κατανομής διαπιστώνεται από τον έλεγχο καλής προσαρμογής των Ν τιμών Kolmogorov-Smirnov.

Η τιμή αυτή του σ_o επειδή προέρχεται από άπειρες συνορθώσεις πρακτικά ταυτίζεται με την πραγματική τιμή του σ_o της συνόρθωσης.

Επιπλέον προκύπτει αντίστοιχα και η αναμενόμενη πραγματική τιμή της αβεβαιότητας της κάθε μέτρησης $\sigma_{\Delta Hi}$

2. Μεθοδολογία

Η συνόρθωση ενός υψομετρικού δικτύου, γνωστού αριθμού κορυφών και των αντίστοιχων μετρούμενων υψομετρικών διαφορών, με τη μέθοδο των συμβατικών παρατηρήσεων βασίζεται στη δημιουργία εξισώσεων συνθήκης, μία για κάθε μοναδιαίο βρόγχο που προκύπτει από τον συγκεκριμένο σχεδιασμό του δικτύου [Αγατζά Α, 2004], [Δερμάνης κ.α, 1992].

Έτσι αν k ο αριθμός των βρόγχων του δικτύου, δημιουργούνται οι παρακάτω εξισώσεις, μία για κάθε βρόγχο, που πρέπει να ικανοποιούν οι επιμέρους υψομετρικές διαφορές l_i.

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{1}^{n_1} l_i\right)_1 = 0 \\ &\left(\sum_{1}^{n_2} l_i\right)_2 = 0 \\ &\ldots \\ &\left(\sum_{1}^{n_k} l_i\right)_k = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $n_1, n_2, ..., n_k$, ο εκάστοτε αριθμός των υψομετρικών διαφορών που απαρτίζουν τον κάθε βρόγχο. Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{1}^{n_1} \upsilon_i\right)_1 = -\left(\sum_{1}^{n_1} l_i\right)_1 \\ &\left(\sum_{1}^{n_2} \upsilon_i\right)_2 = -\left(\sum_{1}^{n_2} l_i\right)_2 \\ &\ldots \\ &\left(\sum_{1}^{n_k} \upsilon_i\right)_k = -\left(\sum_{1}^{n_k} l_i\right)_k \end{aligned} \tag{2}$$

Για το παραπάνω σύστημα εξισώσεων θα πρέπει να ισχύει:

$$B \cdot \upsilon = w \tag{3}$$

όπου,

B είναι ο πίνακας των συντελεστών των $\begin{bmatrix} \left(\sum_{1}^{n_1} \upsilon_i\right)_1 \\ \left(\sum_{1}^{n_2} \upsilon_i\right)_2 \\ \ldots \\ \left(\sum_{1}^{n_k} \upsilon_i\right)_k \end{bmatrix}$,ενώ ο πίνακας w είναι ο $\begin{bmatrix} -\left(\sum_{1}^{n_1} l_i\right)_1 \\ -\left(\sum_{1}^{n_2} l_i\right)_2 \\ \ldots \\ -\left(\sum_{1}^{n_k} l_i\right)_k \end{bmatrix}$.

Αν δεν υπήρχε κανένα σφάλμα τόσο στις μετρήσεις των υψομετρικών διαφορών όσο και στην λειτουργία του γεωδαιτικού εξοπλισμού τότε ο πίνακας w θα ήταν μηδενικός. Κάτι τέτοιο όμως είναι πρακτικά αδύνατο.
Για να είναι εφικτή η προσομοίωση της συνόρθωσης (″ψευδοσυνόρθωση″) του υψομετρικού δικτύου πρέπει να προσδιοριστούν οι τιμές των στοιχείων του πίνακα w. Κάθε στοιχείο του πίνακα προκύπτει ως η διαφορά του αθροίσματος των επιμέρους υψομετρικών διαφορών από το μηδέν. Για να γίνει αυτό, σύμφωνα με την παραδοσιακά εφαρμοζόμενη διαδικασία, πρέπει να είναι γνωστές οι τιμές των επιμέρους υψομετρικών διαφορών, πράγμα αδύνατο πριν τη μέτρηση του δικτύου.
Με την προτεινόμενη μεθοδολογία, χρησιμοποιούνται τυχαίες τιμές που αποδίδονται ως σφάλματα των ΔH_i σε κάθε βρόγχο μέσω της μεθόδου Monte Carlo με τις τυχαίες άπειρες επαναλήψεις που προσφέρουν οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί.
Για τον σχεδιασμό του πίνακα w με την μέθοδο Monte Carlo, ο οποίος αποτελεί και το βασικό στοιχείο στις επαναλαμβανόμενες προσομοιώσεις, θα πρέπει να οριστούν οι ποσότητες εισόδου οι οποίες είναι:

- η κατανομή την οποία θα ακολουθούν οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που θα δίνονται ως τιμές της αβεβαιότητας των υψομετρικών διαφορών κάθε φορά. Συνήθως ορίζεται η κανονική κατανομή.
- η εκτίμηση της τιμής της αβεβαιότητας κάθε υψομετρικής διαφοράς, έτσι ώστε να ορίζεται το διάστημα επιλογής των τυχαίων αυτών τιμών.

Η a-priori εκτίμηση του σφάλματος για κάθε βρόγχο μπορεί να γίνει ως ακολούθως. Έστω ένα στοιχείο του πίνακα w που θα προέκυπτε από ένα κλειστό βρόγχο τριών υψομετρικών διαφορών:

$$w(1,1) = \Delta H_{12} + \Delta H_{23} + \Delta H_{31} \quad (4)$$

θα πρέπει για κάθε μία από αυτές τις υψομετρικές διαφορές να υπολογιστεί η a-priori αβεβαιότητα, ανάλογα με τη μέθοδο μέτρησης είτε αυτή είναι η γεωμετρική χωροστάθμηση, είτε η τριγωνομετρική υψομετρία ακριβείας, ακολουθώντας τον νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων [Λάμπρου Ε., κ.α., 2010].

Επομένως το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα w θα είναι ίσο με:

$$w(1,1) = \pm\sigma_{\Delta H_{12}} \pm \sigma_{\Delta H_{23}} \pm \sigma_{\Delta H_{31}} \quad (5)$$

Για κάθε επανάληψη της ″ψευδοσυνόρθωσης″, κάθε στοιχείο του πίνακα w λαμβάνει διαφορετική τιμή εφ' όσον τα $\sigma_{\Delta H_{12}}, \sigma_{\Delta H_{23}}, \sigma_{\Delta H_{31}}$ λαμβάνουν διαφορετικές τιμές από ψευδοτυχαίους αριθμούς σύμφωνα με την κανονική κατανομή.
Στη συνέχεια δημιουργείται ο πίνακας λ.

$$\lambda = (B \cdot P^{-1} \cdot B^{T})^{-1} \cdot w \quad (6)$$

όπου P ο πίνακας βαρών (εφ' όσον οι παρατηρήσεις είναι ανισοβαρείς).

Ο πίνακας P μεταβάλλεται σε κάθε "ψευδοσυνόρθωση" θέτοντας ως βάρη τα αντίστοιχα $\sigma_{\Delta H_i}$, που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του πινάκα w τα οποία παίρνουν διαφορετικές τιμές σε κάθε "ψευδοσυνόρθωση". (δηλαδή με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο p_i, με $p_i = \frac{\sigma_\kappa^2}{\sigma_{\Delta H_i}^2}$, όπου σ_κ ορίζεται αυθαίρετα ως μονάδα βάρους που αντιστοιχεί στην αβεβαιότητα μιας εκ των υψομετρικών διαφορών).

Ο πίνακας υ των υπολοίπων δίνεται από την σχέση:

$$\upsilon = P^{-1} \cdot B^T \cdot \lambda \tag{7}$$

Από τον πίνακα των υπολοίπων είναι δυνατόν να υπολογισθεί για κάθε επανάληψη της "ψευδοσυνόρθωσης" το τυπικό σφάλμα της.

$$\sigma_o = \pm\sqrt{\frac{\upsilon^T \cdot \upsilon}{r}} \tag{8}$$

όπου r είναι ο βαθμός ελευθερίας.

Το στοιχείο αυτό δεν ήταν δυνατό να προσδιοριστεί με την κλασσική διαδικασία βελτιστοποίησης, χρησιμοποιώντας τις έμμεσες παρατηρήσεις, επειδή δεν μπορούν να υπολογιστούν τα πραγματικά υπόλοιπα των παρατηρήσεων.

Έτσι σε κάθε επανάληψη της προσομοίωσης της συνόρθωσης με την μέθοδο Monte Carlo, αφού υπολογισθεί η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος σ_o, προσδιορίζεται επίσης και ο πίνακας μεταβλητότητας – συμμεταβλητότητας του διανύσματος l, δηλαδή των υψομετρικών διαφορών από την παρακάτω σχέση.

$$V_l = \sigma_o^2 P^{-1} - \sigma_o^2 P^{-1} B^T (BPB^T)^{-1} BP^{-1} \tag{9}$$

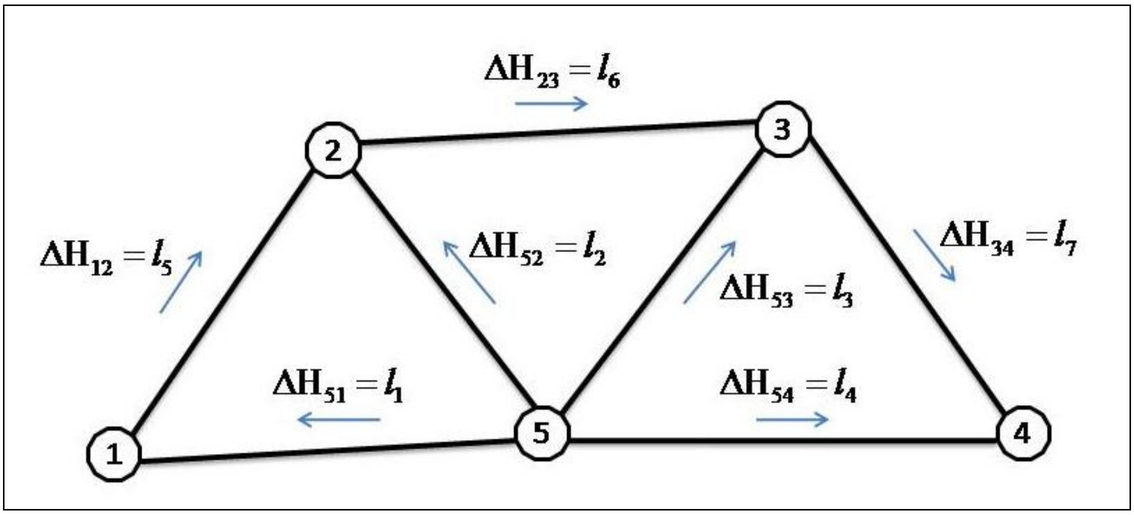
Όσες είναι οι επαναλήψεις της προσομοίωσης της συνόρθωσης τόσα θα είναι και τα αποτελέσματα για τον πίνακα V_l (10^6 ή 10^7). Έτσι είναι δυνατός ο προσδιορισμός του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης για κάθε στοιχείο του πίνακα V_l, σύμφωνα με την κατανομή που ακολουθούν.

Για να διαπιστωθεί ποια κατανομή ακολουθούν οι εξαγόμενες ποσότητες από την μέθοδο Monte Carlo, αυτές θα πρέπει να υπόκεινται σε έλεγχο καλής προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov, ώστε να προσδιορίζεται σωστά ο μέσος όρος και η τυπική τους απόκλιση.
Στο παρακάτω σχήμα 1 παρουσιάζεται μία διαγραμματική απεικόνιση της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε.

Σχήμα 1: Διαγραμματική απεικόνιση της μεθοδολογίας

3. Εφαρμογή

Έστω ότι ένα υψομετρικό δίκτυο αποτελείται από 5 κορυφές, όπως αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Το υψομετρικό δίκτυο

Ο σχεδιασμός είναι να μετρηθούν οι αντίστοιχες υψομετρικές διαφορές l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7. Από το σχήμα διακρίνονται εύκολα τρεις μοναδιαίοι βρόγχοι (125,235,345) και προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις που θεωρητικά έπρεπε να ικανοποιούν οι υψομετρικές διαφορές.

$$
\begin{aligned}
&\Delta\mathrm{H}_{12} + \Delta\mathrm{H}_{25} + \Delta\mathrm{H}_{51} = 0 \Rightarrow l_5 - l_2 + l_1 = 0 \\
&\Delta\mathrm{H}_{23} + \Delta\mathrm{H}_{35} + \Delta\mathrm{H}_{52} = 0 \Rightarrow l_6 - l_3 + l_2 = 0 \\
&\Delta\mathrm{H}_{53} + \Delta\mathrm{H}_{34} + \Delta\mathrm{H}_{45} = 0 \Rightarrow l_3 + l_7 - l_4 = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Στην πραγματικότητα επειδή υπάρχουν σφάλματα στις μετρήσεις οι σχέσεις (10) γίνονται:

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_1 - \upsilon_2 + 0 + 0 + \upsilon_5 + 0 + 0 = -l_1 + l_2 - l_5 \\
&0 + \upsilon_2 - \upsilon_3 + 0 + 0 + \upsilon_6 + 0 = -l_2 + l_3 - l_6 \\
&0 + 0 + \upsilon_3 - \upsilon_4 + 0 + 0 + \upsilon_7 = -l_3 + l_4 - l_7
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Ο πίνακας B των συντελεστών των υπολοίπων θα είναι:

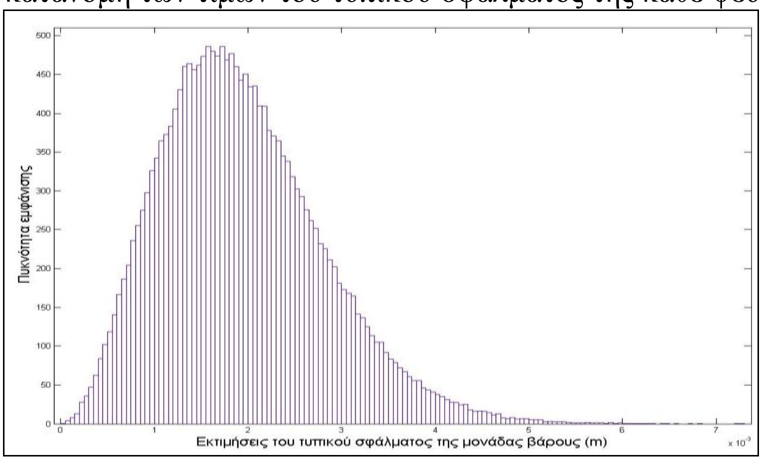
$$
\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\tag{12}
$$

Για τον σχεδιασμό του πίνακα w, ο οποίος αποτελεί και το βασικό στοιχείο στις επαναλαμβανόμενες προσομοιώσεις με την μέθοδο Monte Carlo, ως ποσότητες εισόδου ορίζονται:

- η κανονική ως κατανομή που θα ακολουθούν οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν την αβεβαιότητα των υψομετρικών διαφορών.
- η αβεβαιότητα μοναδιαίας ψηφιακής ανάγνωσης του χωροβάτη ±0.6mm
- και ο αριθμός των στάσεων του χωροβάτη για κάθε υψομετρική διαφορά. ($\Delta\mathrm{H}_{15} \rightarrow n=10$, $\Delta\mathrm{H}_{52} \rightarrow n=11$, $\Delta\mathrm{H}_{53} \rightarrow n=9$, $\rightarrow \Delta\mathrm{H}_{54} \rightarrow n=13$, $\Delta\mathrm{H}_{12} \rightarrow n=10$, $\Delta\mathrm{H}_{23} \rightarrow n=11$, $\Delta\mathrm{H}_{34} \rightarrow n=10$).

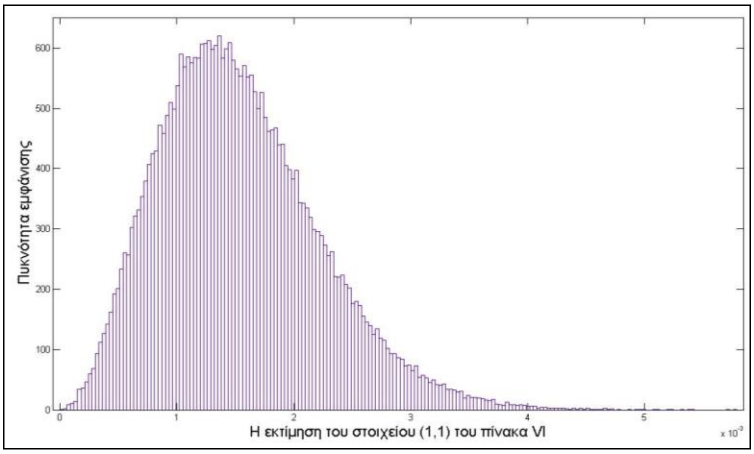
Η διαδικασία των επαναλήψεων των προσομοιώσεων με τη μέθοδο Monte Carlo έγινε με την βοήθεια του λογισμικού Matlab [The MathWorks, 2013].

Με τα συγκεκριμένα στοιχεία εισόδου στην διαδικασία των επαναλαμβανόμενων προσομοιώσεων (10^7 επαναλήψεις) προέκυψε το ιστόγραμμα του σχήματος 3, που απεικονίζει την κατανομή των τιμών του τυπικού σφάλματος της κάθε ψευδοσυνόρθωσης.



Σχήμα 3: Το παραγόμενο ιστόγραμμα των εκτιμήσεων του τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους

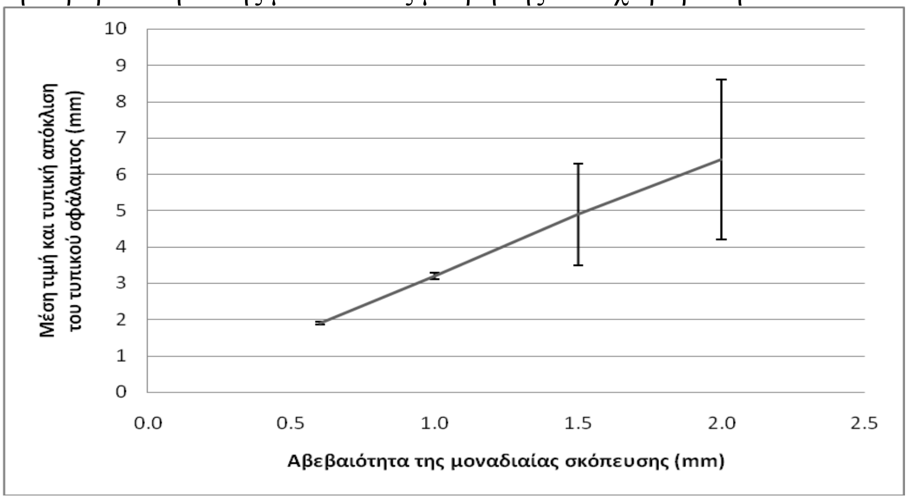
Επίσης, από τον πίνακα μεταβλητότητας – συμμεταβλητότητας των υψομετρικών διαφορών ενδεικτικά παρουσιάζεται και το ιστόγραμμα του στοιχείου $V_l(1,1)$ σχήμα 4, δηλαδή της μεταβλητότητας $\sigma_{\Delta H_{12}}$ της υψομετρικής διαφοράς ΔH_{12}. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα V_l εκφράζουν την αβεβαιότητα της αντίστοιχης υψομετρικής διαφοράς .



Σχήμα 4: Το παραγόμενο ιστόγραμμα των εκτιμήσεων του στοιχείου $V_l(1,1)$

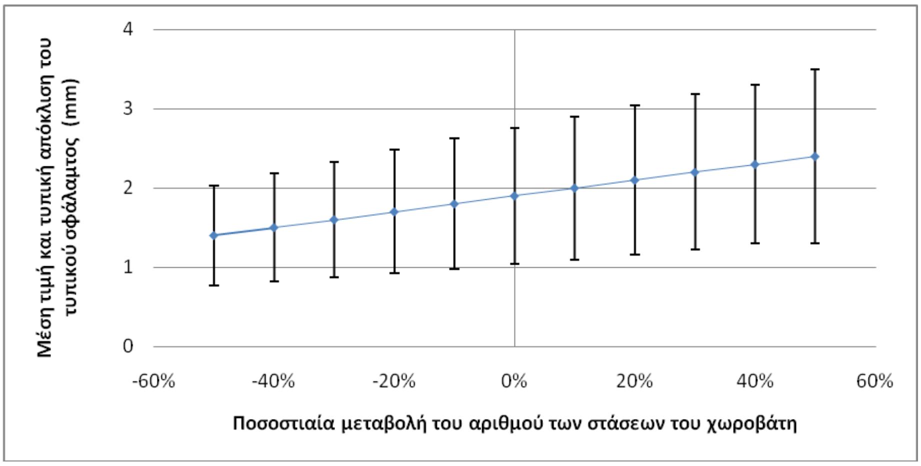
Και για τις δύο εξαγόμενες ποσότητες από την μέθοδο Monte Carlo, που απεικονίζονται στα σχήματα 3 και 4, έγινε έλεγχος καλής προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov, και διαπιστώθηκε ότι οι τιμές αυτές ακολουθούν την Generalized extreme value κατανομή.

Τέλος για το συγκεκριμένο δίκτυο (μαθηματικό μοντέλο) διερευνήθηκε η επίδραση της αβεβαιότητας της μοναδιαίας μέτρησης του χωροβάτη στην τιμή του τυπικού σφάλματος του δικτύου (με την υπόθεση ότι όλες οι μετρήσεις θα γίνουν με γεωμετρική χωροστάθμηση), ώστε να αναδειχθεί η σημαντικότητα της επιλογής του οργάνου μέτρησης. Στο σχήμα 5 παρουσιάζεται η μεταβολή της τιμής του τυπικού σφάλματος σε σχέση με την αβεβαιότητα της μοναδιαίας μέτρησης του χωροβάτη.



Σχήμα 5: Η μεταβολή της μέσης τιμής τυπικού σφάλματος της συνόρθωσης σε σχέση με τη μεταβολή της αβεβαιότητας της μοναδιαίας μέτρησης του χωροβάτη.

Επίσης στο σχήμα 6 απεικονίζεται η μεταβολή της τιμής του τυπικού σφάλματος της συνόρθωσης διατηρώντας σταθερή την τιμή της αβεβαιότητας της μοναδιαίας μέτρησης του χωροβάτη ενώ αυξομειώνεται ο αριθμός των στάσεων του χωροβάτη κατά το ίδιο ποσοστό σε κάθε υψομετρική διαφορά δηλ. αλλάζει το μέγεθος (κλίμακα) του δικτύου.



Σχήμα 6: Η μεταβολή της τιμής του τυπικού σφάλματος της συνόρθωσης σε σχέση με την μεταβολή του αριθμού των στάσεων του χωροβάτη σε όλες τις υψομετρικές διαφορές.

4. Συμπεράσματα

Η διαδικασία της προσομοίωσης της συνόρθωσης ("ψευδοσυνόρθωσης") ενός υψομετρικού δικτύου που αναλύθηκε μπορεί να πραγματοποιηθεί σήμερα γρήγορα με τη χρήση Η/Υ και λογισμικών όπως το Matlab. Η επεξεργασία των δεδομένων και τα εκατομμύρια των επαναλήψεων της ίδιας διαδικασίας πραγματοποιούνται σε λίγα δευτερόλεπτα.

Είναι έτσι εφικτό να πραγματοποιηθούν πολλές παραλλαγές του δικτύου προσθέτοντας ή αφαιρώντας παρατηρήσεις, σε ελάχιστο χρόνο.

Τα εκατομμύρια των προσομοιώσεων της συνόρθωσης κάθε δικτύου (μαθηματικό μοντέλο) που πραγματοποιούνται εξασφαλίζουν πρακτικά άπειρες εκτιμήσεις και άρα επιτυγχάνεται η καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής του τυπικού σφάλματος σ_o του δικτύου.

Έτσι γίνεται ένας αντικειμενικός προσδιορισμός για το $\sigma_{\Delta Hi}$, που μπορεί να επιτευχθεί για κάθε υψομετρική διαφορά που πρόκειται να μετρηθεί. Έτσι παρέχεται η πληροφορία για το άμεσα μετρούμενο μέγεθος, το ΔΗ.

Επιπλέον θέτοντας ως όριο το $\sigma_{\Delta Hi}$ για κάθε μετρούμενη υψομετρική διαφορά μπορεί να γίνει ανίχνευση χονδροειδούς λάθους είτε κατά τη διάρκεια των μετρήσεων είτε στην συνόρθωση. Όταν η τιμή του $\sigma_{\Delta Hi}$ ξεπερνά την αναμενόμενη που έχει προκύψει από την προσομοίωση, οι αντίστοιχες μετρήσεις μπορούν άμεσα να εξαιρεθούν από την συνόρθωση ή να επαναληφθούν.

Τέλος γνωρίζοντας την επιθυμητή αβεβαιότητα στον προσδιορισμό των υψομέτρων σ_{Hi} των κορυφών του δικτύου μπορούν να επιλέγουν για να πραγματοποιηθούν οι μετρήσεις ΔH_i που ικανοποιούν την αβεβαιότητα αυτή, όπου γενικά ισχύει $\sigma_{\Delta Hi} = \sqrt{2}\,\sigma_{Hi}$

Διαπιστώθηκε επίσης ότι η μεταβολή του μεγέθους του δικτύου επηρεάζει ελάχιστα την τελική αβεβαιότητα προσδιορισμού, ενώ σημαντικό παράγοντα αποτελεί η αβεβαιότητα της μοναδιαίας μέτρησης του οργάνου που χρησιμοποιείται.
Είναι φανερό ότι η παραπάνω διαδικασία παρέχει αρκετές πληροφορίες όχι μόνο ποσοτικές αλλά και ποιοτικές για τις παραμέτρους ενός υψομετρικού δικτύου και όχι απλά μια ποσοτική εκτίμηση της μέσης αβεβαιότητας του δικτύου.
Είναι επομένως χρήσιμο να εφαρμόζεται κυρίως σε υψομετρικά δίκτυα ελέγχου μετακινήσεων.

Βιβλιογραφία

Αγατζά - Μπαλοδήμου Α.Μ., Θεωρία Σφαλμάτων και Μ.Ε.Τ, Σημειώσεις ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2004.

Δερμάνης Α., Φωτίου Α., Μέθοδοι και εφαρμογές συνόρθωση παρατηρήσεων, Εκδόσεις: Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1992

Λάμπρου Ε., Πανταζής Γ., Εφαρμοσμένη Γεωδαισία, Εκδόσεις: Ζήτη Αθήνα, 2010

Leica Geosystems., Accreditation - Producer Inspection Certificate M in accordance with DIN 55350-18-4.2.2", Switzerland, 2010.

JCGM 101:2008., «Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method», 2008.

James F., Monte Carlo theory and practice, *Rep. Prog. Phys.* 43 1145, 1980

The MathWorks, Inc. MATLAB and Simulink are registered trademarks of The MathWork., (2013). www.mathworks.com/products/datasheets/pdf/statistics-toolbox.pdf, 12-13.