ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΞΟΔΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Ε. Μαθιουλάκης και Β. Μπελεσιώτης

Εργαστήριο Ηλιακών & άλλων Ενεργειακών Συστημάτων - ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

15310 Αγ. Παρασκευή Αττικής, e-mail: math@ipta.demokritos.gr

Περίληψη

Η πρόσφατη δημοσίευση του 2ου συμπληρώματος του Οδηγού GUM (BIPM, 2008a; BIPM, 2011), σχετικά με την εκτίμηση των αβεβαιοτήτων σε μοντέλα μέτρησης πολλαπλών εξόδων, δίνει τη δυνατότητα μιας υπολογιστικά αποτελεσματικότερης και μετρολογικά πληρέστερης αντιμετώπισης μετρολογικών προβλημάτων τα οποία εμπλέκουν συσχέτιση δεδομένων.

Η προτεινόμενη εργασία έχει ως στόχο την συζήτηση των ζητημάτων που θέτει η εφαρμογή στην πράξη των εργαλείων που παρουσιάζει ο Οδηγός, με έμφαση στη διαχείριση δεδομένων που χαρακτηρίζονται από μη αμελητέες συσχετίσεις.

Το ζητούμενο είναι η ρεαλιστική αποτίμηση του αποτελέσματος μιας μέτρησης, όταν αυτό συνίσταται σε περισσότερα του ενός, συσχετιζόμενα μεταξύ τους δεδομένα, στη βάση των διαθέσιμων τιμών των πρωτογενών μεταβλητών, των αβεβαιοτήτων που χαρακτηρίζουν τις τιμές αυτές, καθώς επίσης και των αμοιβαίων αβεβαιοτήτων που συχνά εμφανίζονται σε αυτού του τύπου τις εφαρμογές.

Συζητιέται επίσης η μεθοδολογία προσδιορισμού των περιοχών κάλυψης για χώρους διαστάσεων μεγαλύτερων της μονάδας και η αξιοποίηση των αποτελεσμάτων κατά την μετέπειτα χρήση του μοντέλου.

Λέξεις Κλειδιά: Αβεβαιότητα, συσχετιζόμενα δεδομένα, μοντέλα πολλαπλών εξόδων

Abstract

The recent publication of the second addendum of GUM (BIPM, 2008a; BIPM, 2011), concerning the estimation of uncertainties in measurement models of multiple outputs, allows the more effective and, on a metrological level, more complete treatment of metrological problems which involve correlated data.

The proposed work aims at discussing the issues imposed by the actual application of the tools recommended by the Guide, putting emphasis on the elaboration of data characterized by non-negligible correlations.

The problem concerns the realistic assessment of a measurement result, when this result consists of more than one, correlated the one to the other, data. The assessment is performed on the basis of the available values of the primary source data, the uncertainties characterizing these data, as well as the mutual uncertainties which are usually present in applications of this type.

Following the general formulation of the problem, the methodology for the determination of the coverage regions, as well as the exploitation of the results for the further use of the model are discussed.

Keywords: Uncertainty, correlated data, multi-measurand measurement models

1.Εισαγωγή

Η μεθοδολογία εκτίμησης των αβεβαιοτήτων στις μετρήσεις ήταν για ένα μεγάλο διάστημα αντικείμενο διαμάχης. Μια συστηματική προσπάθεια ομογενοποίησης των απόψεων σε διεθνές επίπεδο γύρω από το ζήτημα αυτό, κατέληξε το 1995 στη δημοσίευση του *Guide to the expression of uncertainty in measurement* (BIPM, 2006). Χωρίς να απαντάει σε όλα τα - συχνά πολύπλοκα - προβλήματα μετρολογικής αβεβαιότητας, ο οδηγός GUM θέτει το πλαίσιο και δίνει τα βασικά μεθοδολογικά εργαλεία για τον υπολογισμό των αβεβαιοτήτων. Η αξία του έγκειται κυρίως στο ότι αποτελεί προϊόν σύγκλισης απόψεων σε διεθνές επίπεδο. Έγινε γρήγορα αποδεκτός και σήμερα τυγχάνει καθολικής σχεδόν αποδοχής ως κείμενο αναφοράς από μετρολόγους, φορείς διαπίστευσης και εργαστήρια.

Ένα από τα ζητούμενα της μέτρησης είναι ο τρόπος ποσοτικής έκφρασης της γνώσης που αποκτήθηκε σχετικά με το μετρούμενο μέγεθος, έχοντας υπόψη ότι τα όρια της γνώσης αυτής παραπέμπουν στο εύρος των σφαλμάτων μέτρησης, όπως αυτά περιγράφονται από την αβεβαιότητα. Πριν τον GUM, η καλύτερη εκτίμηση του μετρούμενο μεγέθους συνοδεύονταν από μια ανάλυση των σχετικών με το αποτέλεσμα συστηματικών και τυχαίων σφαλμάτων. Ο GUM εισήγαγε μία διαφορετική προσέγγιση, η οποία εστιάζει καλύτερη δυνατή εκτίμησης του αποτελέσματος και της αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει το αποτέλεσμα αυτό, και όχι στο αποτέλεσμα αυτό καθαυτό. Η αβεβαιότητα εκφράζει ποιοτικά και ποσοτικά την ανεπαρκή γνώση για την αληθή τιμή, με τη σχετική διαθέσιμη πληροφορία να περιγράφεται με τη βοήθεια μιας κατανομής πιθανοτήτων για όλο το διάστημα των πιθανών τιμών.

Έτσι ο GUM αντιμετωπίζει με τον ίδιο τρόπο συστηματικά και τυχαία σφάλματα, τοποθετώντας τα συμπεράσματα της ανάλυσης σφαλμάτων σε ένα πλαίσιο πιθανοτήτων. Βασική θεώρηση του GUM είναι ότι, με βάση το αποτέλεσμα της μέτρησης, δεν είναι δυνατόν να αποφανθούμε για το πόσο καλά είναι γνωστή η αληθής τιμή του μετρούμενου μεγέθους, αλλά μόνο για το πόσο καλά πιστεύουμε ότι είναι γνωστή. Από την άποψη αυτή, η αβεβαιότητα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο του πόσο καλά κάποιος πιστεύει ότι γνωρίζει την αληθή τιμή, ως μια έκφραση της περιορισμένης γνώσης για την τιμή αυτή. Από την άποψη αυτή, η έννοια του «πεποίθησης» είναι πρωταρχικής σημασίας, δεδομένου ότι μετακινεί τη μετρολογία προς μία κατεύθυνση ερμηνείας των αποτελεσμάτων των μετρήσεων με όρους πιθανοτήτων, ως έκφραση ενός βαθμού πεποίθησης, στα πλαίσια της οποίας αξιοποιείται με φυσικό τρόπο και η όποια υφιστάμενη γνώση για το μετρούμενο μέγεθος.

Όπως ήταν αναμενόμενο, η εμπειρία από την εφαρμογή στην πράξη του GUM για περίπου δύο δεκαετίες, οδήγησε στην ανάγκη επικαιροποίησης και συμπλήρωσης του μεθοδολογικού πλαισίου που εισήχθηκε αρχικά, με σκοπό την υπέρβαση ορισμένων βασικών αδυναμιών:

- Αδυναμία γενίκευσης της προτεινόμενης από τον GUM διαδικασίας προσδιορισμού του διαστήματος που περιέχει την τιμή του μετρούμενου μεγέθους

για μια καθορισμένη πιθανότητα (διάστημα κάλυψης για δεδομένη πιθανότητα κάλυψης).
- Ανεπαρκείς επεξηγήσεις για την περίπτωση μετρήσεων που εμπλέκουν περισσότερες από μία μετρούμενες ποσότητες (multivariate measurements).
- Ανεπαρκείς διευθετήσεις όσον αφορά την αξιοποίηση του αποτελέσματος της μέτρησης στα πλαίσια της εξέτασης της συμμόρφωσης με όρια και προδιαγραφές.

Στα πλαίσια αυτά δρομολογήθηκαν ορισμένες σημαντικές συμπληρωματικές εκδόσεις:

- GUM Supplement 1 (ή GUM S1): Propagation of distributions using a Monte Carlo method (2008), κείμενο που παρουσιάζει μια ευέλικτη μέθοδος διάχυση pdfs μέσω προσομοίωσης Monte Carlo, με δυνατότητα χειρισμού και μη-γραμμικών μοντέλων (BIPM, 2008b).
- GUM Supplement 2 (ή GUM S2): Extension to any number of output quantities (2011), κείμενο που αφορά τη διάχυση αβεβαιοτήτων και τον υπολογισμό διαστημάτων κάλυψης σε μοντέλα μέτρησης πολλαπλών εξόδων (BIPM, 2011).
- The role of measurement uncertainty in conformity assessment (2012), με οδηγίες για την αξιοποίηση των αποτελεσμάτων στα πλαίσια της εξέτασης της συμμόρφωσης με όρια και προδιαγραφές (BIPM, 2012).

Αναμένεται επίσης η δημοσίευση για το επόμενο διάστημα δύο ακόμα κειμένων, ενός GUM Supplement 3 που αφορά την ανάπτυξη και χρήση μοντέλων μέτρησης και μια κατευθυντήριας οδηγίας σχετικά με την εφαρμογή μεθόδων ελαχίστων τετραγώνων.

Δεν θα ήταν ίσως άσκοπη μια σύντομη αναφορά στους λόγους που επέβαλαν την επικαιροποίηση του θεσμικού πλαισίου του GUM. Σύμφωνα με την Bayesian προσέγγιση, σχηματικά μπορεί να αναφερθεί, ότι το επίπεδο γνώσεων για μία ποσότητα περιγράφεται από μία κατανομή πιθανοτήτων η οποία επικαιροποιείται κάθε φορά που προκύπτουν νέες σχετικές πληροφορίες. Στα πλαίσια του GUM, η Bayesian προσέγγιση δεν χρησιμοποιείται ως τέτοια, αλλά υιοθετείται μόνο για τον χειρισμό των Τύπου Β μη-στατιστικών συνιστωσών αβεβαιότητας. Στην πράξη, χρησιμοποιούνται και διαχέονται εκτιμήσεις της μεταβλητότητας των κατανομών, σύμφωνα με μια συχνοτική προσέγγιση, συνοδευόμενες από τους σχετικούς βαθμούς ελευθερίας (είτε εύλογα στην περίπτωση των συνιστωσών Τύπου Α, είτε καθ' υπέρβαση στην περίπτωση των Τύπου Β συνιστωσών). Η ανάμειξη όμως της συχνοτικής με την Bayesian προσέγγιση οδηγεί σε μια σειρά από δυσκολίες, κυρίως όσον αφορά στον προσδιορισμό του διαστήματος κάλυψης και το βαθμό γενίκευσης των συναφών υπολογιστικών πρακτικών (BIPM, 2008b).

Για το λόγο αυτό αποφασίστηκε, στα πλαίσια της ανάπτυξης των GUM S1 και GUM S2 η γενίκευση της Bayesian συλλογιστικής, σύμφωνα με τη οποία οι ποσοτικές εκτιμήσεις μιας ποσότητας εκφράζονται με τη βοήθεια συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας (probability density function ή PDF). Οι PDF αυτές διαχέονται μέσω του μοντέλου μέτρησης χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες αριθμητικές πρακτικές, οδηγώντας σε μία PDF η οποία αντανακλά τη διαθέσιμη γνώση για το μετρούμενο μέγεθος.

Η εξαιρετικά ενδιαφέρουσα συζήτηση για τα θέματα αυτά έχει απασχολήσει έντονα την μετρολογική κοινότητα τα τελευταία χρόνια, ξεφεύγει ωστόσο από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Να σημειωθεί όμως ότι, αν και η μετακίνηση από την συχνοτική στην Bayesian προσέγγιση θα αιτιολογούσε και την αναγκαιότητα μερικής αναθεώρησης του ίδιου του GUM, η αναθεώρηση αυτή αποφασίστηκε να υλοποιηθεί στην παρούσα φάση, για λόγους συνέχειας, με τη μέθοδο της εκπόνησης συμπληρωμάτων.

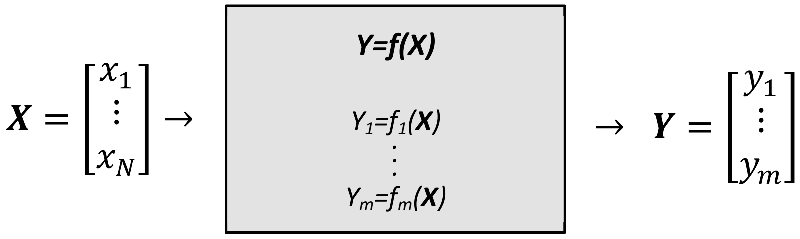
Η παρούσα εργασία εστιάζεται σε μία πτυχή της συζήτησης αυτής, και πιο συγκεκριμένα στο πρόβλημα των μοντέλων πολλαπλών εξόδων και τις τεχνικές αντιμετώπισής του, όπως αυτές εξειδικεύονται από το GUM S2. Συζητείται ειδικότερα η εφαρμογή στην πράξη των εργαλείων που παρουσιάζει ο Οδηγός, με έμφαση στη διαχείριση δεδομένων που χαρακτηρίζονται από μη αμελητέες συσχετίσεις και στον προσδιορισμό υπερ-ελλειπτικών ή υπερ-ορθογωνίων περιοχών κάλυψης που να αντανακλούν ρεαλιστικά τα δεδομένα αυτού του είδους των μετρήσεων.

Για λόγους ομοιογένειας και οικονομίας του κειμένου, χρησιμοποιούνται τα σύμβολα και οι ορισμοί του οδηγού GUM S2 [3]. Οι κεφαλαίοι χαρακτήρες (π.χ. X) χρησιμοποιούνται τόσο για τη φυσική ποσότητα, όσο και για την αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή πιθανοτήτων περιγράφει την γνώση για την ποσότητα αυτή. Οι μικροί χαρακτήρες (π.χ. x) χρησιμοποιούνται για μια συγκεκριμένη τιμή της ποσότητας. Οι έντονοι χαρακτήρες (π.χ. $\boldsymbol{X}$) αντιστοιχούν σε διάνυσμα ή πίνακα τιμών, με το εκθέτη T να δείχνει την ανάστροφο του πίνακα (π.χ. $\boldsymbol{X}^T$).

2. Διάχυση αβεβαιοτήτων σε μοντέλα μέτρησης πολλαπλών εξόδων

Σύμφωνα με τον GUM, η απόκριση (output) $\boldsymbol{Y}$ ενός συστήματος μέτρησης μπορεί να μοντελοποιηθεί από μία συνάρτηση $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ η οποία συσχετίζει το $\boldsymbol{Y}$ με τις ποσότητες επιρροής (inputs) $X_1, \ldots, X_N$, όπου $\boldsymbol{X}=(X_1, \ldots, X_N)^T$. Ο οδηγός GUM περιορίζεται σχεδόν αποκλειστικά στην διάχυση αβεβαιοτήτων σε αυτής της κατηγορίας τα μονομεταβλητά μοντέλα μέτρησης, δηλαδή σε αυτά που εμπλέκουν μέτρηση ενός μόνο βαθμωτού (μη διανυσματικού) μεγέθους.

Στην πράξη όμως, συχνά ένα πρόβλημα μέτρησης παραπέμπει στον ταυτόχρονο προσδιορισμό περισσοτέρων της μιας ποσοτήτων $Y_1, \ldots, Y_m$, συνδεόμενων με τις ποσότητες επιρροής μέσω ενός πολυμεταβλητού μοντέλου μέτρησης $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$, όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{Y}=(Y_1, \ldots, Y_m)^T$ είναι το διάνυσμα των τιμών απόκρισης. Ο οδηγός GUM S2 επικεντρώνεται σε αυτή την κατηγορία των προβλημάτων.



Σχήμα 1. Πολυμεταβλητό μοντέλο μέτρησης

Θα μπορούσε βεβαίως να αναρωτηθεί κανείς σχετικά με την σκοπιμότητα ταυτόχρονης διαχείρισης όλων των τιμών απόκρισης ενός πολυμεταβλητού μοντέλου μέτρησης, αντί της αντιμετώπισης τους ως m διακριτά μοντέλα $Y_1=f_1(X), \ldots, Y_m=f_m(X)$. Υπάρχουν τέσσερεις τουλάχιστον λόγοι που αιτιολογούν την επιλογή αυτή:

- Σε πολλές περιπτώσεις οι ποσότητες επιρροής δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, οι τιμές μεγεθών που μετρούνται ταυτόχρονα ή που για τη μέτρησή τους χρησιμοποιήθηκε το ίδιο όργανο, ή ακόμα όταν για τη μέτρησή τους χρησιμοποιήθηκαν όργανα τα οποία έχουν διακριβωθεί αξιοποιώντας τον ίδιο εξοπλισμό αναφοράς, χαρακτηρίζονται από μη μηδενικές αμοιβαίες αβεβαιότητες (συνδιακυμάνσεις), οι οποίες οφείλουν να παίρνονται υπόψη στον υπολογισμό αβεβαιοτήτων. Ακόμα όμως και εάν τα $X_1, ..., X_N$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, τα $Y_1, ..., Y_m$ θα παρουσιάζουν κάποιο βαθμό συσχέτισης λόγω της εξάρτησής τους από τα ίδια μεγέθη επιρροής. Η ταυτόχρονη διαχείριση όλων των αποκρίσεων $Y_1, ..., Y_m$ στα πλαίσια του πολυμεταβλητού μοντέλου $\boldsymbol{Y}$=$\boldsymbol{f(X)}$ επιτρέπει την διαχείριση των συνδιακυμάνσεων, τόσο στο στάδιο του υπολογισμού της αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει το μετρούμενο $\boldsymbol{Y}$, όσο και σε αυτό της αξιοποίησης των τιμών του $\boldsymbol{Y}$ σε μελλοντικούς υπολογισμούς.

- Η μορφή της περιοχής κάλυψης του τελικού αποτελέσματος, για ένα ορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, δεν είναι εύκολο να εκτιμηθεί στην περίπτωση ενός πολυμεταβλητού μοντέλου χρησιμοποιώντας μόνο τα εργαλεία του GUM, τα οποία είναι προσαρμοσμένα στις ανάγκες των μονομεταβλητών μοντέλων του τύπου $\boldsymbol{Y}$=$\boldsymbol{f(X)}$.
- Η ταυτόχρονη θεώρηση της μέτρησης του συνόλου των τιμών του διανύσματος $\boldsymbol{Y}$ επιτρέπει την απλούστερη διατύπωση και την ταχύτερη εκτέλεση των απαιτούμενων αριθμητικών υπολογισμών χρησιμοποιώντας πίνακες και διανύσματα, αξιοποιώντας και τις δυνατότητες που παρέχονται από τα σύγχρονα υπολογιστικά πακέτα λογισμικού.
- Σε ορισμένες περιπτώσεις το μετρούμενο μέγεθος είναι μιγαδικός αριθμός ο οποίος μπορεί να αντιμετωπιστεί ως απόκριση ενός μοντέλου με δύο εξόδους, μία για το πραγματικό και μία για το φανταστικό μέρος του, π.χ. η μέτρηση του συντελεστή ανάκλασης που μετράται από ένα ανακλασίμετρο μικροκυμάτων.

Η διαδικασία εκτίμησης της αβεβαιότητας υλοποιείται σε τρία διακριτά στάδια:

α) Διατύπωση του προβλήματος: ορισμός του μετρούμενου μεγέθους $\boldsymbol{Y}$ (έξοδος του μοντέλου μέτρησης), προσδιορισμός των παραμέτρων επιρροής $\boldsymbol{X}$ (εισόδων στο μοντέλο μέτρησης), διατύπωση του μοντέλου μέτρησης, δηλαδή της σχέσης που συνδέει τα $\boldsymbol{Y}$ με τα $\boldsymbol{X}$, απόδοση στα δεδομένα εισόδου x_i των κατάλληλων PDF, στη βάση της διαθέσιμης γνώσης (Κανονική, Ορθογώνια, κλπ)

Ο Οδηγός GUM S1 παρέχει αρκετές πληροφορίες σχετικά με τα κριτήρια επιλογής της κατάλληλης κάθε φορά κατανομής πιθανοτήτων. Η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή επιλέγεται όταν η διαθέσιμη πληροφορία για το $\boldsymbol{X}$ περιορίζεται στην γνώση μιας εκτίμησης x και του συνδεδεμένου με αυτή πίνακα συμμεταβλητότητας (covariance matrix) $\boldsymbol{U_x}$:

$$g_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}[\det(\boldsymbol{U_X})]^{0.5}} exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V_X}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\right) \quad (1)$$

Όταν οι ποσότητες $X_1, ..., X_N$ είναι συσχετιζόμενες, η πληροφορία που τις αφορά περιέχεται, εκτός από τις εκτιμώμενες τιμές $X_1, ..., X$ και τις τυπικές τους αβεβαιότητες $u(x_1),\dots,\ u(x_N)$, και στις συμμεταβλητότητες που χαρακτηρίζουν τα ζεύγη τιμών (x_i, x_j).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν περιγραφές για τις μαθηματικές προσεγγίσεις που επιτρέπουν την παραγωγή των PDFs που αντιστοιχούν στις παραπάνω πληροφορίες (Possolo, 2010).

Μια άλλη κατανομή, η πολυμεταβλητή t-distribution, χρησιμοποιείται όταν είναι η μόνη διαθέσιμη πληροφορία συνίσταται σε μια σειρά από διακριτές τιμές του $\boldsymbol{X}$, θεωρούμενες ως προκύπτουσες ανεξάρτητα από μία πολυμεταβλητή κανονική κατανομή αγνώστου καλύτερης εκτίμησης και αγνώστου πίνακα συμμεταβλητότητας [3]. Υπενθυμίζεται ότι η προσέγγιση αυτή εφαρμόζεται στις περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων τιμών, τις οποίες ο οδηγός GUM αντιμετωπίζει μέσω του Τύπου Α υπολογισμού αβεβαιοτήτων.

β) Διάχυση των PDF των ***X*** μέσω του μοντέλου μέτρηση

Σκοπός είναι, στο στάδιο αυτό, να προσδιοριστεί η PDF του ***Y***, διαχέοντας την πιθανοτική πληροφορία μέσω του μοντέλου μέτρησης, από τις εισόδους στις εξόδους του. Αυτό μπορεί να γίνει με ένα από τους παρακάτω τρόπους:

- Με αναλυτικές μεθόδους οι οποίες επιτρέπουν την μαθηματική αναπαράσταση της PDF του ***Y***, και οι οποίες - αν και ιδανικά ακριβείς – μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε απλές περιπτώσεις.

- Με την αντικατάσταση του μοντέλου μέτρησης από ένα 1ης τάξεως ανάπτυγμα Taylor, δηλαδή με τον γνωστό μας Νόμο Διάχυσης των Αβεβαιοτήτων, ο οποίος παρουσιάζει εμφανείς αδυναμίες στην περίπτωση μη-γραμμικών ή μη παραγωγίσιμων μοντέλων.

- Με αριθμητικές μεθόδους οι οποίες υλοποιούν τη διάχυση των κατανομών με τη βοήθεια της προσομοίωσης Monte Carlo, παράγοντας μία διακριτοποιημένη PDF του μετρούμενου μεγέθους ***Y*** (BIPM, 2011).

γ) Επεξεργασία της πληροφορίας που περιέχεται στην PDF του ***Y***

Στόχος στο στάδιο αυτό είναι να υπολογισθεί μια εκτίμηση ***y*** του ***Y***, ως η πιθανότερη του τιμή, ο αντίστοιχος πίνακας συμμεταβλητότητας ***Uy***, καθώς και το διάστημα κάλυψης για μία δεδομένη πιθανότητα κάλυψης, συνήθως 95%. Στο στάδιο κυρίως αυτό είναι άλλωστε που εμφανίζονται τα πλεονεκτήματα της ενιαίας θεώρησης ενός πολυπαραμετρικού μοντέλου μέτρησης.

3. Παράδειγμα μοντέλου μέτρησης δύο παραμέτρων

Ως παράδειγμα εφαρμογής δίδεται η διακρίβωση ενός θερμομέτρου, από την οποία προκύπτει μία καμπύλη διακρίβωσης:

$$T=a\tau+b \qquad (2)$$

όπου t είναι η ένδειξη του θερμομέτρου και T η “αληθής” θερμοκρασία αναφοράς.

Παρόμοια προβληματική μπορεί βέβαια να εφαρμοστεί και σε όλες τις διακριβώσεις που καταλήγουν σε κάποιας μορφής συσχέτισης της ένδειξης του οργάνου μέτρησης με την συμβατικά θεωρούμενη αληθή τιμή ή τιμή αναφοράς. Όλες οι διακριβώσεις που βασίζονται σε συγκρίσεις πολλών σημείων καταλήγουν άλλωστε σε ένα ή περισσότερους συντελεστές, συμπεριλαμβανομένων και των διακριβώσεων των μεθόδων.

Στις περιπτώσεις αυτή, το αποτέλεσμα της “μέτρησης” είναι οι συντελεστές a και b της εξίσωσης (2). Το «μοντέλο μέτρησης», με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε εδώ, είναι ο μηχανισμός υπολογισμού των a και b από τα πρωτογενή δεδομένα της διακρίβωσης.

Είναι ευρέως γνωστό ότι οι τιμές των *a και b* χαρακτηρίζονται από τις αντίστοιχες μεταβλητότητες $u^2(a)$ και $u^2(b)$, καθώς και από την μεταξύ τους συμμεταβλητότητα $u(a,b)$ (ISO, 2010). Στο βαθμό που δεν είναι διαθέσιμη άλλη πληροφορία σχετικά με το είδος των κατανομών των a και b, η από κοινού κατανομή που χαρακτηρίζει το $\boldsymbol{Y}$ είναι η διμεταβλητή κανονική κατανομή πιθανοτήτων $g_{a,b}$ με:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \boldsymbol{U_y} = \begin{bmatrix} u^2(a) & u(a,b) \\ u(a,b) & u^2(b) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Το πρόβλημα της περιοχής κάλυψης μπορεί να δεχτεί, στην περίπτωση αυτή, δύο διαφορετικές προσεγγίσεις:

α) Μια ***ορθογώνια περιοχή κάλυψης*** με κέντρο το σημείο (a, b) που ορίζεται θεωρώντας δύο διακριτά διαστήματα κάλυψης, το διάστημα $[a\text{-}k_q u(a),\ a\text{+}k_q u(a)]$ για το a, και το διάστημα $[b\text{-}k_q u(b),\ b\text{+}k_q u(b)]$ για το b. Η περιοχή κάλυψης για το a υπολογίζεται ανεξάρτητα από τη διαθέσιμη γνώση για το b, από περιθώρια κατανομή:

$$g_a = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,b}\, db \tag{4}$$

Παρόμοια υπολογίζεται η περιοχή κάλυψης $[b\text{-}k_q u(b),\ b\text{+}k_q u(b)]$ για το b. Εάν η επιθυμητή πιθανότητα κάλυψης (το εμβαδόν του ορθογωνίου) είναι p%, ο επιμέρους συντελεστής κάλυψης k_q θα είναι, σύμφωνα με τον Οδηγό GUM S2:

$$q = 1\text{-}(1\text{-}p)/2 = (1\text{+}p)/2 \tag{5}$$

Εάν όμως τα μεγέθη a και b μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα μεταξύ τους, ο Οδηγός GUM S2 προτείνει:

$$q = p^{0.5} \tag{6}$$

Για επιθυμητή πιθανότητα κάλυψης p=0.95 και κανονική περιθώρια κατανομή, q=0.975 και ο συντελεστής κάλυψης k_q είναι k_q=2.24.

Δεδομένου ότι πρόκειται για διμεταβλητό μοντέλο μέτρησης, η διάστημα κάλυψης έχει τη μορφή δυσδιάστατης περιοχής στο επίπεδο που καθορίζεται από τους άξονες τιμών των a και b. Ο συντελεστής k_p ορίζεται με τρόπο ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου το οποίο έχει πλευρές τα διαστήματα κάλυψης των a και b να είναι ίσο με την επιθυμητή πιθανότητα κάλυψης p. Στις περιπτώσεις μοντέλων μέτρησης με περισσότερες των δύο μεταβλητές εξόδου, το διάστημα κάλυψης θα είναι του τύπου υπερορθογωνίου το οποίο αναπτύσσεται σε αντίστοιχο αριθμό διαστάσεων, με προφανή την αδυναμία γραφικής του αναπαράστασης για πάνω από τρεις μεταβλητές.

β) Μια ***ελλειπτική περιοχή κάλυψης*** με κέντρο το σημείο (a, b) που ορίζεται από την εξίσωση, με τον συντελεστή k_p να ορίζεται με τρόπο ώστε το εμβαδόν της έλλειψης να είναι ίσο με την επιθυμητή πιθανότητα κάλυψης p:

$$(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{y})^T U_{\boldsymbol{y}}^{-1} (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{y}) = k_p^2 \tag{7}$$

Και στην περίπτωση αυτή το διάστημα κάλυψης έχει τη μορφή δυσδιάστατης περιοχής στο επίπεδο που καθορίζεται από τους άξονες τιμών των a και b. Στις περιπτώσεις μοντέλων μέτρησης με περισσότερες των δύο μεταβλητές εξόδου, το διάστημα κάλυψης θα είναι του τύπου υπερέλλειψης η οποία αναπτύσσεται σε αντίστοιχο αριθμό διαστάσεων, με προφανή - και εδώ - την αδυναμία γραφικής του αναπαράστασης για περισσότερες των τριών μεταβλητές εξόδου. Το προφανές πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι, σε αντίθεση με την προσέγγιση (α), λαμβάνεται υπόψη η αμοιβαία συσχέτιση μεταξύ των *a* και *b*.

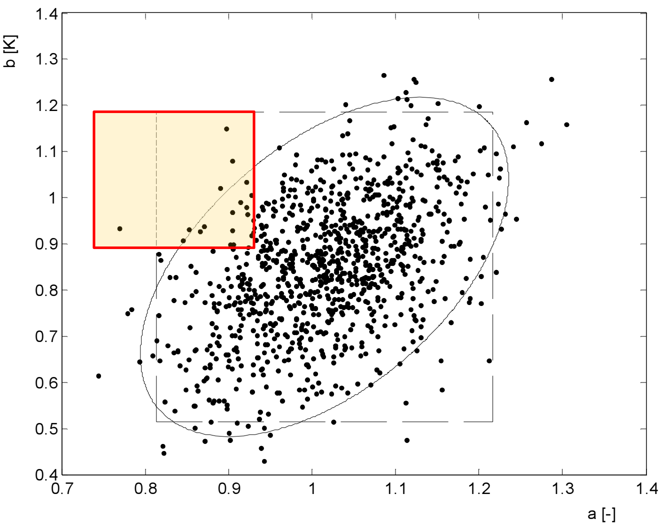
Όταν το Y χαρακτηρίζεται από μία διμεταβλητή κανονική κατανομή, η ποσότητα $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{y})^T U_{\boldsymbol{y}}^{-1}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{y})$ χαρακτηρίζεται με τη σειρά της από μία κατανομή χ^2 με δύο βαθμούς ελευθερίας και το k_p^2 ικανοποιεί την σχέση:

$$p = \Pr(\chi^2 < k_p^2) \qquad (8)$$

Για μία επιθυμητή πιθανότητα κάλυψης p=0.95, προκύπτει επομένως k_p=2.45.

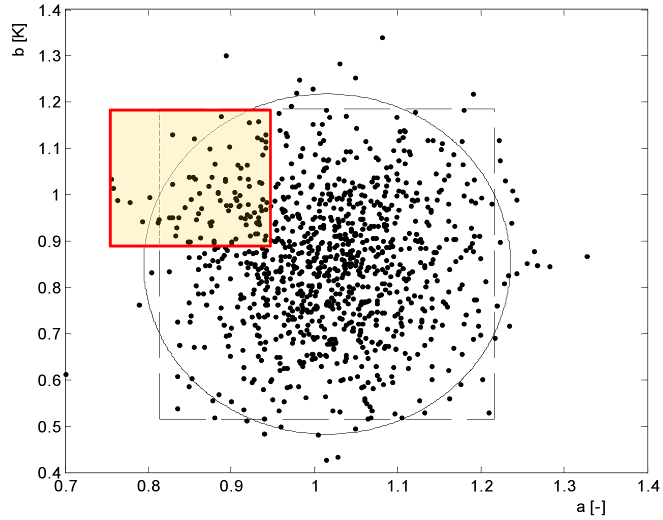
Ως παράδειγμα αριθμητικής εφαρμογής, σχετικά με τη διακρίβωση του θερμομέτρου, θεωρούμε την περίπτωση μια καμπύλης διακρίβωσης με *a*=1.015, *u(a)*=0.09 K, *b*=0.85, *u(b)*=0.15 K και *u(a,b)*=0.007 K:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1.015 \\ 0.85 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U_y} = \begin{bmatrix} 0.09^2 & 0.007 \\ 0.007 & 0.15^2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$



Σχήμα 2. Ελλειπτική (συνεχής γραμμή), ορθογώνια (διακεκομμένη γραμμή) περιοχή κάλυψης και ενδεικτικά σημεία αντιπροσωπευτικά της κατανομής των τιμών των *a* και *b*.

Από την επίλυση της εξίσωσης (7) προκύπτουν τα όρια της περιοχής κάλυψης στην περίπτωση της ελλειπτικής προσέγγισης. Στο σχήμα 2 φαίνονται τόσο τα όρια της ελλειπτικής περιοχής (συνεχής γραμμή), μαζί με τα όρια της ορθογώνιας περιοχής (διακεκομμένη γραμμή). Στο ίδιο σχήμα έχουν τοποθετηθεί ενδεικτικά και σημεία τα οποία έχουν προκύψει με τη βοήθεια γεννήτριας τυχαίων αριθμών, θεωρώντας διμεταβλητή κανονική κατανομή με τα στατιστικά χαρακτηριστικά των δεδομένων που εξετάζονται (εξίσωση 9)



Σχήμα 3. Ελλειπτική (συνεχής γραμμή), ορθογώνια (διακεκομμένη γραμμή) περιοχή κάλυψης και ενδεικτικά σημεία αντιπροσωπευτικά της κατανομής των τιμών των *a* και *b* για μηδενική την μεταξύ τους συσχέτιση.

Στο Σχήμα (3) φαίνονται αντίστοιχα αποτελέσματα για τα ίδια ποσοτικά δεδομένα, αλλά θεωρώντας μηδενικό συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των *a* και *b*, δηλαδή με:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1.015 \\ 0.85 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U_y} = \begin{bmatrix} 0.09^2 & 0.000 \\ 0.000 & 0.15^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Στα παραπάνω σχήματα φαίνεται χαρακτηριστικά το πλεονέκτημα της υιοθέτησης ελλειπτικών περιοχών κάλυψης, ειδικά στις περιπτώσεις συσχετισμένων δεδομένων, στο βαθμό που επιτρέπουν μια πιο ρεαλιστική εκτίμηση της πιθανότητας να βρίσκονται οι τιμές του μετρούμενου μεγέθους (στην περίπτωση που εξετάζεται εδώ των *a* και *b*) σε μία συγκεκριμένη περιοχή.

Σε πρακτικό επίπεδο, όταν κάποιος θελήσει να υπολογίσει την πιθανότητα να βρίσκεται το αποτέλεσμα της μέτρησης σε μια συγκεκριμένη περιοχή (π.χ. η έγχρωμη περιοχή στα σχήματα 2 και 3), το αποτέλεσμα θα είναι διαφορετικό, ανάλογα με τη μέθοδο προσδιορισμού της περιοχής κάλυψης.

Η χρησιμότητα της θεώρησης και της συμμεταβλητότητας Αυτό επίσης που ενδιαφέρει τον μετρολόγο σε παρόμοιες περιπτώσεις είναι η διάχυση των αβεβαιοτήτων και των αμοιβαίων αβεβαιοτήτων (συμμεταβλητότητας) κατά την μελλοντική χρήση των αποτελεσμάτων της μέτρησης. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι το διακριβωμένο θερμόμετρο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση δύο θερμοκρασιών $T_1=at_1+b$ και $T_2=at_2+b$, χαρακτηριστικών μιας διεργασίας. Οι τιμές των T_1 και T_2 θα χαρακτηρίζονται από ένα πίνακα αβεβαιότητας $\boldsymbol{U_T}$, ο οποίος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\boldsymbol{U_T} = C_y \boldsymbol{U_y} C_y^T \tag{11}$$

Όπου $\boldsymbol{T} = (T_1, T_2)^T$ και C_y είναι ο πίνακας ευαισθησίας (από τη σχέση 2):

$$C_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial T1}{\partial a} & \frac{\partial T1}{\partial b} \\ \frac{\partial T2}{\partial a} & \frac{\partial T2}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

με:

$$\boldsymbol{U_T} = \begin{bmatrix} u^2(T_1) & u(T_1, T_2) \\ u(T_1, T_2) & u^2(T_{12}) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Όπως εύκολα συνάγεται από τις παραπάνω σχέσεις, με τον τρόπο αυτό είναι δυνατόν να υπολογιστούν απευθείας, και χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, τόσο η αβεβαιότητας στις τιμές των T_1 και T_2, όσο και η μεταξύ τους συμμεταβλητότητα.

4. Συμπεράσματα

Το έως πρόσφατα αποδεκτό από τη μετρολογική κοινότητα μεθοδολογικό πλαίσιο για τον υπολογισμό των αβεβαιοτήτων αφορούσε κυρίως μονομεταβλητά μοντέλα μέτρησης. Η συμπλήρωσή του στην κατεύθυνση των πολυμεταβλητών μοντέλων επιτρέπει μια πιο ρεαλιστική αποτίμηση των αποτελεσμάτων σε μετρήσεις που εμπλέκουν περισσότερες της μία μετρούμενες ποσότητες, ειδικά όταν οι ποσότητες αυτές χαρακτηρίζονται από σημαντικές μεταξύ τους συσχετίσεις. Επιπλέον, στις περιπτώσεις αυτές, ο συνδυασμός των τεχνικών προσομοίωσης Monte-Carlo με τους υπολογισμούς με χρήση πινάκων διευκολύνουν σημαντικά τους αναγκαίους υπολογισμούς, διασφαλίζοντας παράλληλα την τεχνική τους επάρκεια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

BIPM, Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM), www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf, 2008a.

BIPM, Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” - Propagation of distributions using a Monte Carlo method (GUM S1), www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_101_2008_E.pdf, 2008b.

BIPM, Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” - Extension to any number of output quantities (GUM S2), www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_102_2011_E.pdf.

BIPM, Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment, www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_106_2012_E.pdf, 2012

Possolo, A. Copulas for uncertainty analysis. Metrologia 47, 262-271, 2010.

ISO, ISO/TS 28037, Determination and use of straight-line calibration functions, 2010, Geneva.