ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Δημήτριος Ρωσσικόπουλος
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών
e-mail: rossi@topo.auth.gr

Περίληψη

Ο εντοπισμός και η εκτίμηση των συστηματικών σφαλμάτων που προέρχονται από ένα όργανο μέτρησης εξαιτίας της κακής ρύθμισής του, αποτελεί αναγκαία διαδικασία. Η αναγκαιότητα αυτής της διαδικασίας σε τακτά χρονικά διαστήματα, εξαιτίας των μεταβολών των σταθερών του οργάνου με την πάροδο του χρόνου, ή εξαιτίας της κακής χρησιμοποίησης του, τονίζεται τόσο στα εγχειρίδια χρήσης του οργάνου που δίνονται από τις κατασκευάστριες εταιρείες, όσο και στις προδιαγραφές πολλών κρατών. Η βαρύτητα δε που δίνουν οι κατασκευάστριες εταιρείες στο πρόβλημα του ελέγχου και της διακρίβωσης των οργάνων φαίνεται και από το πλήθος των δημοσιευμάτων τους σε διάφορα περιοδικά ή δικά τους εγχειρίδια. Στην εργασία αυτή αναλύονται τόσο τα θεωρητικά όσο και τα πρακτικά θέματα που σχετίζονται με τη διαδικασία που ακολουθείται για τον έλεγχο και τη διόρθωση ενός οργάνου, ώστε οι μετρήσεις του να συμφωνούν με τα εθνικά πρότυπα.

Λέξεις-Κλειδιά: βαθμονόμηση, διακρίβωση οργάνων, ακρίβεια, αξιοπιστία των μετρήσεων.

1. Εισαγωγή

Βαθμονόμηση ή διακρίβωση ενός οργάνου μέτρησης είναι το σύνολο των δραστηριοτήτων, οι οποίες σκοπό έχουν τον εντοπισμό και την εκτίμηση των τιμών των σφαλμάτων του. Ο όρος βαθμονόμηση αποδίδει τον αγγλικό όρο calibration. Η έννοια της βαθμονόμησης έρχεται από τις αρχές του δεκάτου ογδόου αιώνα, όπου οι λέξεις "calibre" και "calliper" περιέγραφαν ένα όργανο μέτρησης ή σύγκρισης διαμετρημάτων. Η ελληνική απόδοση του όρου calibre είναι “διάμετρος όπλου” και το ρήμα calibrate σημαίνει “μέτρηση διαμετρημάτων όπλων” η οποία γινόταν με ειδικό βαθμολογημένο κανόνα, του οποίου το διάστημα μεταξύ της *k* χαραγής και της μηδενικής ήταν ίσο με τη διάμετρο μπάλας κανονιού βάρους *k* pounts. Ο όρος calibrate σχετιζόταν με μετρήσεις και κανόνες μέτρησης.

Τον δέκατο ένατο αιώνα, ο όρος calibrate σχετίζεται με τη διαίρεση της μετρικής κλίμακας θερμομέτρων, βαρομέτρων και άλλων οργάνων μέτρησης πίεσης, καθώς και με τον έλεγχο ήδη “βαθμολογημένων” οργάνων. Αρχίζει να αναφέρεται σε μετρικά όργανα και η διαδικασία “calibration” σκοπό έχει τη δημιουργία πίνακα διορθώσεων, που θα πρέπει να εφαρμοσθούν στις μετρήσεις οργάνου, ώστε να απαλειφθούν ή ελαχιστοποιηθούν τα εσωτερικά του σφάλματα.

Στη σύγχρονη ορολογία όρος “calibration” και η ελληνική απόδοσή του “βαθμονόμηση” δηλώνει τη διαδικασία που ακολουθείται για τον έλεγχο και τη διόρθωση ενός οργάνου, ώστε οι μετρήσεις του να συμφωνούν με τα εθνικά πρότυπα.

Οι δύο όροι, μέτρηση και παρατήρηση, έχουν την ίδια έννοια. Και οι δύο, χρησιμοποιούνται στην πράξη και αναφέρονται στη διαδικασία που ακολουθείται, στη σύγκριση δηλαδή κάποιων ποσοτήτων της φύσης με γνωστές ποσότητες, τις λεγόμενες “σταθερές μέτρησης”, αλλά και στο αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής, που είναι ένας αριθμός. Οι ποσότητες που παρατηρούνται, ονομάζονται παρατηρούμενες ποσότητες. Οι πιο κλασικές παρατηρούμενες ποσότητες στη γεωδαισία

και στην τοπογραφία είναι οι οριζόντιες γωνίες ανάμεσα σε τρία σημεία στην επιφάνεια της γης, οι κατακόρυφες γωνίες, οι διευθύνσεις, τα αζιμούθια, οι οριζόντιες ή κεκλιμένες αποστάσεις και οι υψομετρικές διαφορές ανάμεσα σε δύο σημεία στην επιφάνεια της γης.

Αν και σκεφτόμαστε συνήθως την παρατήρηση σαν μία απλή πράξη, στην πραγματικότητα περιλαμβάνει πολλούς επιμέρους χειρισμούς, όπως, π.χ., στη μέτρηση μιας απλής γωνίας με θεοδόλιχο έχουμε την κέντρωση του θεοδολίχου πάνω στο σημείο στάσης, την οριζοντίωσή του, την εστίαση του τηλεσκοπίου, την αποκατάσταση των συνθηκών του συστήματος ανάγνωσης, τη σκόπευση των σημείων και τέλος την ανάγνωση της τιμής της γωνίας. Το σύνολο των σφαλμάτων που υπεισέρχονται στην παρατήρηση από τους παραπάνω χειρισμούς αποτελούν το σφάλμα της παρατήρησης.

Το σημαντικό πρόβλημα κατά τη βαθμονόμηση ενός οργάνου είναι ο διαχωρισμός των σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατ' αρχάς από τους παραπάνω χειρισμούς, αλλά και από το περιβάλλον των μετρήσεων, από τα "εσωτερικά του σφάλματα". Ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται αυτός ο διαχωρισμός, οι μέθοδοι βαθμονόμησης χωρίζονται σε εργαστηριακές και σε μεθόδους πεδίου. Και στις δύο περιπτώσεις όμως απαιτούνται:

- Ειδικές διατάξεις (κυρίως στις εργαστηριακές μεθόδους)
- Ειδικές τεχνικές μέτρησης
- Ειδικά μέθοδοι ανάλυσης των παρατηρήσεων και αυστηρά κριτήρια αξιολόγησης της ακρίβειας και της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων (κυρίως στις μεθόδους πεδίου).

Οι εργαστηριακές μέθοδοι βαθμονόμησης εφαρμόζονται στις περιπτώσεις σφαλμάτων τέτοιων, που δεν διαχωρίζονται εύκολα από άλλα σφάλματα. Επίσης, εφαρμόζονται στις περιπτώσεις όπου η απευθείας επέμβαση στα μέρη του οργάνου είναι ευκολότερη, πιο αξιόπιστη και πιο οικονομική. Παρ' όλα αυτά όμως όλα τα όργανα μπορούν να ελεγχθούν με μετρήσεις πεδίου από μετρήσεις των ιδίων οργάνων και πρέπει ο κάθε χρήστης να γνωρίζει τις τεχνικές αυτές ώστε να είναι σε θέση να τα ελέγχει.

Για την σωστή επιλογή της τεχνικής των μετρήσεων και της ανάλυσης των υπολογισμών, ώστε να ελεγχθεί και να βαθμονομηθεί ένα όργανο, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να γνωρίζουμε πολύ καλά το τι μετράμε, και τι σφάλματα υπεισέρχονται κάθε φορά στις μετρήσεις μας. Αν, για παράδειγμα, μετρούμε με ένα θεοδόλιχο με σκοπό να ελέγξουμε το σύστημα ανάγνωσης και αν πρέπει να εκτιμήσουμε το σφάλμα που τυχόν παρουσιάζει, τότε θα πρέπει να ακολουθήσουμε ειδικές τεχνικές ώστε να αποφύγουμε άλλης μορφής σφάλματα, ή αν δεν μπορέσουμε να τα αποφύγουμε θα πρέπει να τα αναγνωρίσουμε και να τα περιγράψουμε με μαθηματικές σχέσεις στις εξισώσεις των παρατηρήσεων.

2. Τα σφάλματα των παρατηρήσεων

Τα σφάλματα των μετρήσεων μπορούν να χωρισθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- Εκείνα που απαλείφονται ή περιορίζονται στο ελάχιστο αν εφαρμόσουμε κάποιες ειδικές τεχνικές μέτρησης
- Εκείνα που υπολογίζονται με τη διαδικασία της βαθμονόμησης και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για τη διόρθωση των παρατηρήσεων, και
- Εκείνα τα οποία παραμένουν στις μετρήσεις και δεν εντοπίζονται, αλλά χαρακτηρίζονται τυχαία. Τα σφάλματα αυτά ορίζουν την ακρίβεια των μετρήσεων.

Για την καλύτερη ανάλυση των σφαλμάτων και την επιλογή του τρόπου αντιμετώπισής τους, τα χωρίζουμε σε τέσσερις κατηγορίες, ανάλογα με την προέλευσή τους:

- Στα προσωπικά σφάλματα του παρατηρητή, που θεωρούνται τυχαία.
- Στα σφάλματα του περιβάλλοντος των μετρήσεων. Τα σφάλματα αυτά αποτελούνται από ένα

συστηματικό και ένα τυχαίο μέρος. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το συστηματικό μέρος απαλείφεται ή γίνεται ασήμαντο, ακολουθώντας κάποιες ειδικές τεχνικές μέτρησης, ή υπολογίζοντας διορθώσεις με τη βοήθεια παραμέτρων που μετριούνται ανεξάρτητα, ή διευρύνοντας τις αρχικές εξισώσεις των παρατηρήσεων.

- Στα σφάλματα που προέρχονται από τις γεωμετρικές αναγωγές, ώστε να υπολογιστεί η τιμή της παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια αναφοράς. Τα σφάλματα αυτά θεωρούνται τυχαία, και προέρχονται από την αβεβαιότητα των παραμέτρων εκείνων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των αναγωγών, ή και από την απλοποίηση των σχετικών εξισώσεων. Κατά τη βαθμονόμηση, οι μετρήσεις του οργάνου πρέπει να σχεδιάζονται έτσι ώστε να μην απαιτούνται γεωμετρικές αναγωγές.
- Στα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου μέτρησης. Τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου είναι αυτά που οφείλονται σε ατέλειες της κατασκευής τους ή στην απορρύθμισή τους με την πάροδο του χρόνου.

Με τον όρο βαθμονόμηση εννοούμε την εκτίμηση αυτών των σφαλμάτων από μετρήσεις που γίνονται με το ίδιο το όργανο ή από εργαστηριακές μετρήσεις στα μηχανικά ή/και ηλεκτρονικά του μέρη, καθώς και την εκτίμηση της εσωτερικής ακρίβειας του οργάνου.

3. Απόλυτη και σχετική βαθμονόμηση. Αυτοβαθμονόμηση

Το πρόβλημα της βαθμονόμησης, στη γενική του μορφή, τίθεται ως εξής: Δίνονται οι παρατηρήσεις $\mathbf{y}_o^b$ και $\mathbf{y}^b$ του πρότυπου οργάνου και του οργάνου που ελέγχεται αντιστοίχως, των κοινών ποσοτήτων $\mathbf{y}^{(a)}$ του πεδίου βαθμονόμησης. Πεδίο βαθμονόμησης είναι το "σύστημα" πάνω στο οποίο γίνονται οι μετρήσεις του οργάνου. Για την περιγραφή του πεδίου βαθμονόμησης επιλέγονται κάποιες παράμετροι $\mathbf{x}^{(\alpha)}$, οι οποίες ονομάζονται παράμετροι πεδίου ή παράμετροι αναφοράς. Οι σχέσεις που συνδέουν τις παρατηρούμενες ποσότητες $y^{(\alpha)}$ με τις παραμέτρους αναφοράς $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ είναι της μορφής

$$y^{(\alpha)} = f(\mathbf{x}^{(\alpha)}) \tag{1}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το όργανο που ελέγχεται δεν μετράει σωστά, τότε δεν μετρήθηκαν ακριβώς οι ποσότητες $y^{(\alpha)}$, αλλά οι $y^{(\alpha)} + \psi$, όπου ψ τα σφάλματα μέτρησης εξαιτίας των εσωτερικών σφαλμάτων του οργάνου. Για την ανάλυση των παρατηρήσεων του οργάνου αυτού, αντί της σχέσης (1), χρησιμοποιείται η διευρυμένη

$$y^{(\alpha)} = f(\mathbf{x}^{(\alpha)}, \mathbf{a}^{(\alpha)}) \tag{2}$$

όπου $\mathbf{a}^{(\alpha)}$ οι παράμετροι βαθμονόμησης ή πρόσθετες παράμετροι, οι οποίες περιγράφουν τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου, $\psi = \varphi(\mathbf{a}^{(\alpha)})$. Ζητείται η εκτίμηση $\hat{\mathbf{a}}$ των παραμέτρων $\mathbf{a}^{(\alpha)}$.

Απόλυτη Βαθμονόμηση: Απευθείας μέτρηση με το όργανο μιας σταθερής ή ορισμένης ποσότητας, ή απευθείας μέτρηση με ειδικά (πρότυπα) όργανα μηχανικών ή ηλεκτρονικών μερών του οργάνου που βαθμονομείται. Το πεδίο βαθμονόμησης θεωρείται απόλυτα ορισμένο. Το σύστημα των εξισώσεων των παρατηρήσεων σε γραμμική μορφή γράφεται

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\,\mathbf{a} + \mathbf{v} \tag{3}$$

όπου $\mathbf{a}$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων βαθμονόμησης, $\mathbf{b}$ οι ανηγμένες παρατηρήσεις και $\mathbf{v}$ τα σφάλματα των παρατηρήσεων για τα οποία $E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$ και $E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C} = \sigma^2\,\mathbf{Q}$ ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων τους. Για την εφαρμογή της πιστής αναλυτικής παρεμβολής, όπου έχουμε ένα απλό πρόβλημα προσαρμογής της συνάρτησης που περιγράφει τα σφάλματα οργάνου στις παρατηρήσεις που θεωρούνται γνωστές χωρίς σφάλματα, ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστοποίησης $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \min$. (λαμβάνεται $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$), ενώ για την εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή, όπου

οι παρατηρήσεις συνοδεύονται από τον πίνακα συμμεταβλητοτήτων τους, το κριτήριο βελτιστοποίησης γίνεται $\mathbf{v}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v} = \min$.

Ο όρος $\mathbf{F}\,\mathbf{a}$ περιγράφει τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου. Τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{F}$ είναι τιμές γνωστών συναρτήσεων των μεγεθών που μετρά απευθείας το όργανο, αλλά και άλλων παραμέτρων, π.χ., της ηλικίας του οργάνου, της θερμοκρασίας περιβάλλοντος, του χρόνου λειτουργίας του οργάνου από το "άνοιγμά" του, κλπ.

Σχετική βαθμονόμηση, όπου το όργανο βαθμονομείται ως προς ένα άλλο, υψηλότερης ακρίβειας, που θεωρείται σωστό. Το πεδίο βαθμονόμησης ορίζεται από τις μετρήσεις του πρότυπου οργάνου, οι οποίες συνοδεύονται από τον πίνακα (συμ)μεταβλητοτήτων τους. Η ανάλυση των παρατηρήσεων των δύο οργάνων γίνεται διαχωρισμένα ή ταυτόχρονα. Το σύστημα των εξισώσεων των παρατηρήσεων σε μορφή πινάκων γράφεται

$$\mathbf{b}_o = \mathbf{A}_o\,\mathbf{x} + \mathbf{v}_o \qquad \text{πρότυπο όργανο} \tag{4}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\,\mathbf{a} + \mathbf{v}_1 \qquad \text{το όργανο που ελέγχεται} \tag{5}$$

όπου $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a}$ είναι τα διανύσματα των αγνώστων παραμέτρων, $\mathbf{b}$ οι ανηγμένες παρατηρήσεις και $\mathbf{v}$ τα σφάλματα των παρατηρήσεων για τα οποία $E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$ και $E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C} = \sigma^2\,\mathbf{Q}$. Ο όρος $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ περιγράφει το σύστημα πάνω στο οποίο γίνεται η βαθμονόμηση και οι παράμετροι $\mathbf{x}$ είναι οι παράμετροι αναφοράς. Ανάλογα με τη μορφή του όρου $\mathbf{F}\,\mathbf{a}$, τη μορφή δηλαδή των συναρτήσεων που περιγράφουν τα σφάλματα του οργάνου, σχεδιάζεται το πεδίο βαθμονόμησης και οι παρατηρήσεις που θα γίνουν στο πεδίο αυτό.

Συνήθως, το πρόβλημα της σχετικής βαθμονόμησης τίθεται στη μορφή

$$\mathbf{b}_o = \mathbf{A}_o\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_o \tag{6}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_1\,\mathbf{a} + \mathbf{v}_1 \tag{7}$$

όπου δηλαδή οι παρατηρήσεις του πρότυπου οργάνου, αποτελούν κάποιες παραμέτρους αναφοράς για τον ορισμό του πεδίου βαθμονόμησης, το οποίο ορίζεται στη συνέχεια από τις παρατηρήσεις του οργάνου που ελέγχεται.

Αυτοβαθμονόμηση: Το πεδίο βαθμονόμησης ορίζεται από τις ίδιες παρατηρήσεις του οργάνου που ελέγχεται. Το σύστημα των εξισώσεων των παρατηρήσεων του οργάνου που ελέγχεται γράφεται σε γραμμική μορφή

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\,\mathbf{a} + \mathbf{v}_1 \tag{8}$$

Η αυτοβαθμονόμηση και η σχετική βαθμονόμηση γίνεται συνήθως με μεθόδους πεδίου, όπου τόσο οι μετρήσεις, όσο και η υπολογιστική διαδικασία είναι πιο πολύπλοκες.

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω, η βαθμονόμηση ενός οργάνου περιλαμβάνει:
1. Την περιγραφή των εσωτερικών σφαλμάτων του οργάνου
2. Τον σχεδιασμό του πεδίου βαθμονόμησης καθώς και των μετρήσεων
3. Τις μετρήσεις
4. Την ανάλυση των μετρήσεων και την στατιστική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων

Οι μετρήσεις γίνονται με ειδικά όργανα (τα οποία θεωρούνται πρότυπα) πάνω σε μηχανικά ή ηλεκτρονικά μέρη του οργάνου που ελέγχεται (απόλυτη βαθμονόμηση), ή με ειδικά όργανα υψηλής ακρίβειας (πρότυπα όργανα) του πεδίου βαθμονόμησης για τον ορισμό των παραμέτρων αναφοράς (σχετική βαθμονόμηση), ή είναι μετρήσεις του οργάνου που βαθμονομείται. Οι τελευταίες γίνονται σε γνωστό πεδίο (απόλυτη βαθμονόμηση), ή σε πεδίο όπου έχουν γίνει παρατηρήσεις με άλλο όργανο και προϋπάρχουν εκτιμήσεις των παραμέτρων αναφοράς (σχετική βαθμονόμηση) ή σε άγνωστο πεδίο, που ορίζεται μόνο από τις παρατηρήσεις του οργάνου που ελέγχεται (αυτοβαθμονόμηση)

Πίνακας 1. Οι λύσεις με διάφορες επιλογές ελαχίστων δεσμεύσεων για τον ορισμό του συστήματος αναφοράς.

$\dot{\mathbf{H}}\ \mathbf{x} = \mathbf{z}$:	
$\mathbf{R}_x = \mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T + \dot{\mathbf{H}}^T\dot{\mathbf{H}}$ $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_x^{-1}\left[\mathbf{u}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{u}_a + \dot{\mathbf{H}}^T\mathbf{z}\right]$ $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_a^{-1}\left[\mathbf{u}_a - \mathbf{N}_{xa}^T\hat{\mathbf{x}}\right]$	$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} - \dot{\mathbf{E}}^T(\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{E}}^T)^{-1}(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^T)^{-1}\dot{\mathbf{E}}$ $\mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{N}_a^{-1} + \mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}$ $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}$
και $\dot{\mathbf{E}}$ ο πίνακας των εσωτερικών δεσμεύσεων $\dot{\mathbf{E}}\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$.	
$\dot{\mathbf{H}}\ \mathbf{x} + \ddot{\mathbf{H}}\ \mathbf{a} = \mathbf{z}$:	
$\mathbf{R}_a = \mathbf{N}_a + \ddot{\mathbf{H}}^T\ddot{\mathbf{H}}$ $\mathbf{R}_{xa} = \mathbf{N}_{xa} + \dot{\mathbf{H}}^T\ddot{\mathbf{H}}$ $\mathbf{R}_x = \mathbf{N}_x - \mathbf{R}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{R}_{xa}^T + \dot{\mathbf{H}}^T\dot{\mathbf{H}}$ $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_x^{-1}\left[\mathbf{u}_x - \mathbf{R}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{u}_a + \dot{\mathbf{H}}^T\mathbf{z}\right]$ $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_a^{-1}\left[\mathbf{u}_a - \mathbf{R}_{xa}^T\hat{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{H}}^T\mathbf{z}\right]$	$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} - \dot{\mathbf{E}}^T\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{E}}$ $\mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{R}_a^{-1} + \mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{R}_{xa}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{R}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1} - \ddot{\mathbf{E}}^T\mathbf{S}^{-1}\ddot{\mathbf{E}}$ $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{R}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1} + \dot{\mathbf{E}}^T\mathbf{S}^{-1}\ddot{\mathbf{E}}$ $\mathbf{S}^{-1} = (\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{E}}^T + \ddot{\mathbf{H}}\ddot{\mathbf{E}}^T)^{-1}(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^T + \ddot{\mathbf{E}}\ddot{\mathbf{H}}^T)^{-1}$
και $\dot{\mathbf{E}}$, $\ddot{\mathbf{E}}$ οι πίνακες των εσωτερικών δεσμεύσεων $\dot{\mathbf{E}}\ \mathbf{x} + \ddot{\mathbf{E}}\ \mathbf{a} = \mathbf{0}$.	
$\dot{\mathbf{H}}\ \mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}}$, $\ddot{\mathbf{H}}\ \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{z}}$	
$\mathbf{R}_a = \mathbf{N}_a + \ddot{\mathbf{H}}^T\ddot{\mathbf{H}}$ $\mathbf{R}_x = \mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T + \dot{\mathbf{H}}^T\dot{\mathbf{H}}$ $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_x^{-1}\left[\mathbf{u}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{u}_a + \dot{\mathbf{H}}^T\dot{\mathbf{z}}\right]$ $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{R}_a^{-1}\left[\mathbf{u}_a - \mathbf{N}_{xa}^T\hat{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{H}}^T\ddot{\mathbf{z}}\right]$	$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} - \dot{\mathbf{E}}^T\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{E}}$ $\mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{R}_a^{-1} + \mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1} - \ddot{\mathbf{E}}^T\mathbf{S}^{-1}\ddot{\mathbf{E}}$ $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{R}_a^{-1}$ $\mathbf{S}^{-1} = (\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{E}}^T + \ddot{\mathbf{H}}\ddot{\mathbf{E}}^T)^{-1}(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^T + \ddot{\mathbf{E}}\ddot{\mathbf{H}}^T)^{-1}$
και $\dot{\mathbf{E}}$, $\ddot{\mathbf{E}}$ οι πίνακες των εσωτερικών δεσμεύσεων $\dot{\mathbf{E}}\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{E}}\ \mathbf{a} = \mathbf{0}$.	

4. Η ανάλυση των παρατηρήσεων

Το πρόβλημα της βαθμονόμησης από τη σκοπιά της ανάλυσης των παρατηρήσεων, αντιμετωπίζεται με την επέκταση του μαθηματικού μοντέλου ώστε να περιλαμβάνει και τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου που ελέγχεται. Το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων σε μορφή πινάκων γράφεται στη γενική του μορφή

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{F}\ \mathbf{a} + \mathbf{v} \tag{9}$$

όπου $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a}$ είναι τα διανύσματα των αγνώστων παραμέτρων αναφοράς και βαθμονόμησης αντίστοιχα, $\mathbf{b}$ οι ανηγμένες παρατηρήσεις του πρότυπου οργάνου και του οργάνου που ελέγχεται, ή του οργάνου που ελέγχεται μόνο, $\mathbf{v}$ τα σφάλματα των παρατηρήσεων για τα οποία $E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$ και $E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C} = \sigma^2\ \mathbf{Q}$ ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων τους. Ο όρος $\mathbf{A}\ \mathbf{x}$ περιγράφει το σύστημα πάνω στο οποίο γίνεται η βαθμονόμηση και ο όρος $\mathbf{F}\ \mathbf{a}$ περιγράφει τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου.

Ικανοποιώντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\ \mathbf{v} = \min.$, όπου $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$, προκύπτει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T\mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{F} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{b} \\ \mathbf{F}^T\mathbf{P}\,\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & \mathbf{N}_{xa} \\ \mathbf{N}_{xa}^T & \mathbf{N}_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_a \end{bmatrix} \tag{10}$$

Η λύση, στην περίπτωση που το παραπάνω σύστημα είναι πλήρους βαθμού, δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{N}_x^{-1}(\mathbf{u}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{u}_a) \\ \hat{\mathbf{a}} &= \mathbf{N}_a^{-1}(\mathbf{u}_a - \mathbf{N}_{xa}^T\,\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \tag{11}$$

Οι πίνακες των συντελεστών των (συμ)μεταβλητοτήτων των παραμέτρων $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{a}}$, καθώς και των μεταξύ τους διασυμμεταβλητοτήτων, είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{x}} &= (\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{N}_{xa}^T)^{-1} \\ \mathbf{Q}_{\hat{a}} &= \mathbf{N}_a^{-1} + \mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{N}_{xa}^T\,\mathbf{N}_x^{-1}\,\mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1} \\ \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}} &= -\mathbf{N}_x^{-1}\,\mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1} \end{aligned} \tag{12}$$

Αν και στα προβλήματα βαθμονόμησης οι άγνωστες παράμετροι επιλέγονται έτσι ώστε να είναι εκτιμήσιμες, οπότε η λύση δίνεται από τις παραπάνω σχέσεις, παρόλα αυτά σε ορισμένες περιπτώσεις ενδέχεται να προκύψουν μη εκτιμήσιμες παράμετροι. Μη εκτιμήσιμες μπορεί να είναι μόνο οι παράμετροι $\mathbf{x}$, αλλά και οι πρόσθετες παράμετροι $\mathbf{a}$. Το πρόβλημα αυτό των μη εκτιμήσιμων παραμέτρων αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή ελαχίστων δεσμεύσεων. Στην πρώτη περίπτωση οι ελάχιστες δεσμεύσεις αναφέρονται μόνο στις παραμέτρους $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$. Στην δεύτερη περίπτωση οι ελάχιστες δεσμεύσεις αναφέρονται και στις παραμέτρους $\mathbf{a}$ και μπορεί να έχουν, ανάλογα με την εφαρμογή, τη "συνολική" μορφή $\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} + \dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{a} = \mathbf{z}$ ή τη "διαχωρισμένη" μορφή $\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$, $\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{a} = \mathbf{z}$. Στον πίνακα (1) δίνονται οι λύσεις για τις τρεις αυτές επιλογές των ελαχίστων δεσμεύσεων. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν και οι λύσεις με εσωτερικές δεσμεύσεις $\dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ή $\dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{E}}\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$, ή $\dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{E}}\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$, όπου οι πίνακες $\dot{\mathbf{E}}$ και $\ddot{\mathbf{E}}$ ικανοποιούν τις σχέσεις $\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, ή $\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{F}^T\ddot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}^T\ddot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ αντίστοιχα.

Εκτός από τις ελάχιστες δεσμεύσεις, χρήσιμη επιλογή κατά τη βαθμονόμηση των οργάνων είναι και η λύση με ουσιαστικές δεσμεύσεις, ανεξάρτητα αν εμφανίζεται ή όχι αδυναμία βαθμού. Οι ουσιαστικές δεσμεύσεις αναφέρονται στις παραμέτρους αναφοράς $\mathbf{x}$. Μπορεί να είναι κάποιες σταθερές τιμές γι' αυτές τις παραμέτρους, οπότε έχουν τη μορφή $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$ (απόλυτη βαθμονόμηση), ή να έχουν τη γενικότερη μορφή $\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

Στην πράξη οι τιμές $\mathbf{x}_o$ δεν είναι κάποιες απόλυτα γνωστές τιμές, αλλά προέρχονται από την ανάλυση των παρατηρήσεων που έγιναν στο πεδίο βαθμονόμησης με ένα ακριβέστερο και πιο αξιόπιστο όργανο, το πρότυπο όργανο. Για τον λόγο αυτόν είναι προτιμότερη η αντιμετώπισή τους ως "προϋπάρχουσα πληροφορία" για τις παραμέτρους $\mathbf{x}$, που συνοδεύεται από τον πίνακα βάρους $\mathbf{P}_x = \mathbf{Q}_x^{-1}$.

Στο μοντέλο που αναλύουμε, $\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα για τις οποίες υπάρχουν οι πρόσθετες πληροφορίες, $\mathbf{a}$ οι παράμετροι που περιγράφουν το σφάλμα, και $\mathbf{v}$ τα σφάλματα των παρατηρήσεων. Για τις παραμέτρους $\mathbf{v}$ και $\mathbf{x}$ υποθέτουμε ότι ισχύει $E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$, $E\{\mathbf{x}\} = \boldsymbol{\mu}$ και οι πίνακες συμμεταβλητοτήτων είναι

$$E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C} = \sigma_1^2\,\mathbf{Q}, \quad E\{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\} = \mathbf{C}_x = \sigma_2^2\,\mathbf{Q}_x \quad \text{και} \quad E\{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C}_{xv} = \mathbf{0} \tag{13}$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα συμμεταβλητοτήτων

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \tag{14}$$

Πίνακας 2. Οι λύσεις με ουσιαστικές δεσμεύσεις.

$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}=\mathbf{z}$	$\mathbf{R}_x=\mathbf{N}_x-\mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{N}_{xa}^T+\dot{\mathbf{H}}^T\dot{\mathbf{H}}$ $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{R}_x^{-1}\,[\mathbf{u}_x-\mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{u}_a]$ $\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}_R-\mathbf{R}_x^{-1}\,\dot{\mathbf{H}}^T(\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{R}_x^{-1}\,\dot{\mathbf{H}}^T)^{-1}(\dot{\mathbf{H}}\,\hat{\mathbf{x}}_R-\mathbf{z})$ $\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{N}_a^{-1}[\mathbf{u}_a-\mathbf{N}_{xa}^T\,\hat{\mathbf{x}}]$	$\mathbf{Q}_{\hat{x}}=\mathbf{R}_x^{-1}-\mathbf{R}_x^{-1}\,\dot{\mathbf{H}}^T(\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{R}_x^{-1}\,\dot{\mathbf{H}}^T)^{-1}\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{R}_x^{-1}$ $\mathbf{Q}_{\hat{a}}=\mathbf{N}_a^{-1}+\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{N}_{xa}^T\,\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1}$ $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}}=-\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1}$
$\mathbf{x}=\mathbf{x}_o$	$\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{N}_a^{-1}[\mathbf{u}_a-\mathbf{N}_{xa}^T\,\mathbf{x}_o]=\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{P}\,(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_o)$	$\mathbf{Q}_{\hat{a}}=\mathbf{N}_a^{-1}$
$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}$ $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_{1o}$	$\dot{\mathbf{H}}^T\dot{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{I}\end{bmatrix},\ \mathbf{R}_x^{-1}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{Q}}_{11}&\tilde{\mathbf{Q}}_{12}\\ \tilde{\mathbf{Q}}_{12}^T&\tilde{\mathbf{Q}}_{22}\end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{x}}_R=$ $\hat{\mathbf{x}}_2=\hat{\mathbf{x}}_R-\tilde{\mathbf{Q}}_{12}^T\,\tilde{\mathbf{Q}}_{11}^{-1}\,(\hat{\mathbf{x}}_R-\mathbf{x}_{1o})$ $\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{N}_a^{-1}[\mathbf{u}_a-\mathbf{N}_{xa}^T\,\hat{\mathbf{x}}]$	$\mathbf{Q}_{\hat{x}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\tilde{\mathbf{Q}}_{22}-\tilde{\mathbf{Q}}_{12}^T\,\tilde{\mathbf{Q}}_{11}^{-1}\,\tilde{\mathbf{Q}}_{12}\end{bmatrix}$ $\mathbf{Q}_{\hat{a}}=\mathbf{N}_a^{-1}+\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{N}_{xa}^T\,\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1}$ $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}}=-\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{N}_{xa}\,\mathbf{N}_a^{-1}$

Όταν προϋπάρχουν εκτιμήσεις για κάποιες από τις άγνωστες παραμέτρους, που συνοδεύονται από τον πίνακα συμμεταβλητοτήτων τους, είναι δυνατόν οι άγνωστες αυτές παράμετροι, ή να προστεθούν ως επιπλέον ψευδοπαρατηρήσεις, ή ισοδύναμα, να αντιμετωπιστούν ως τυχαίες παράμετροι μαζί με τα σφάλματα των παρατηρήσεων **v**. Η αντιμετώπιση αυτή γίνεται στα πλαίσια της ανεπηρέαστης βέλτιστης γραμμικής εκτίμησης (BLUE), την οποία ακολουθούμε συνήθως σ' όλες τις γεωδαιτικές εφαρμογές, με βάση την ισοδυναμία της με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με πίνακα βάρους τον αντίστροφο του πίνακα συμμεταβλητοτήτων. Στις δύο αυτές περιπτώσεις οι λύσεις είναι ισοδύναμες και δίνονται από τι σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}=(\mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\\
&\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{L}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_o)\\
&\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_o+\mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{F}\mathbf{L})(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_o)\\
&\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{Q}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{F}\mathbf{L})(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_o)
\end{aligned}\qquad(15)$$

Πέρα από τη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση, είναι δυνατόν να αντιμετωπισθεί προϋπάρχουσα πληροφορία σχετική με κάποιες από τις παραμέτρους, είτε αυτή έχει τον χαρακτήρα κάποιων διαθέσιμων τιμών, είτε ενός διαθέσιμου πίνακα συμμεταβλητοτήτων, χρησιμοποιώντας διαφορετικά κριτήρια, κυρίως στην κατεύθυνση της άρσης του κριτηρίου να είναι η εκτίμηση ανεπηρέαστη και στην αντικατάσταση του κριτηρίου ελάχιστης μεταβλητότητας με αυτό του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Οι παραπάνω τύποι στην περίπτωση αυτή παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{L}\,(\mathbf{b}-\alpha\,\mathbf{A}\boldsymbol{\mu})\\
&\hat{\mathbf{x}}=\alpha\,\boldsymbol{\mu}+\mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{F}\mathbf{L})(\mathbf{b}-\alpha\,\mathbf{A}\boldsymbol{\mu})\\
&\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{Q}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{F}\mathbf{L})(\mathbf{b}-\alpha\,\mathbf{A}\boldsymbol{\mu})
\end{aligned}\qquad(16)$$

όπου α παράμετρος, η οποία παίρνει τιμή ανάλογα με τη μορφή της εκτίμησης.

Για τη μη "μη ομογενή βέλτιστη γραμμική εκτίμηση (inhomBLE, Best inhomogeneously Linear Estimation), η οποία ισοδυναμεί με την "μη ομογενή βέλτιστη ασθενώς ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση (inhomBLUE, Best inhomogeneously Linear weakly Unbiased Prediction) έχουμε $\alpha=1$.

Στην περίπτωση βαθμονόμησης των οργάνων, επειδή η προϋπάρχουσα πληροφορία προέρχεται από τις μετρήσεις του πρότυπου οργάνου, που και αυτό χαρακτηρίζεται από ορισμένη ακρίβεια, προτιμότερη είναι η εφαρμογή της "ομογενούς βέλτιστης γραμμικής εκτίμησης" (homBLE, Best

homogeneously Linear Estimation), ή της "ομογενούς βέλτιστης γραμμικής ασθενώς ανεπηρέαστης εκτίμησης" (homBLUE, Best homogeneously Linear weakly Unbiased Estimation), οι οποίες είναι "ανθεκτικές" ως προς τα σφάλματα που περιέχει η πληροφορία αυτή. Οι λύσεις για τις δύο αυτές εκτιμήσεις δίνονται από τους παραπάνω τύπους για τιμές του συντελεστή α

$$\alpha = \frac{\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{b}}{1+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}} \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{b}}{\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}} \tag{17}$$

αντιστοίχως. Από τις εκτιμήσεις αυτές η πρώτη (homBLE) τείνει να γίνει επηρεασμένη για τις παραμέτρους $\mathbf{x}$, ενώ η δεύτερη είναι "ασθενώς" ανεπηρέαστη. Θέτοντας $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_o$ προκύπτουν οι εκτιμήσεις για τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου, καθώς και τις παραμέτρους $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{L}\,(\mathbf{b} - \alpha\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_o) \\
&\hat{\mathbf{x}} = \alpha\,\mathbf{x}_o + \mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})(\mathbf{b} - \alpha\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_o) \qquad (18)\\
&\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})(\mathbf{b} - \alpha\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_o) \quad \text{όπου} \quad \alpha = \frac{\mathbf{x}_o^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{b}}{\mathbf{x}_o^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{A}\,\mathbf{x}_o} \qquad (19)
\end{aligned}$$

Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις εκτιμήσεις αυτές δίνονται από τους Schaffrin (1985) και Dermanis (1991). Στη σύγχρονη βιβλιογραφία δίνονται για τη γενικότερη περίπτωση των εξισώσεων των παρατηρήσεων με σφάλματα στον πίνακα σχεδιασμού (errors-in-variables model) και άλλες λύσεις βασισμένες στις τεχνικές των λεγόμενων ολικών ελαχίστων τετραγώνων (total least squares) που διαφοροποιούνται από τα προηγούμενα κυρίως στις αριθμητικές μεθόδους που εφαρμόζονται για τη βελτίωση της τελικής λύσης και βασίζονται σε κάποιο σύστημα διαδοχικών επαναλήψεων.

Οι εκτιμήσεις των πινάκων (συμ)μεταβλητοτήτων προκύπτουν από τους πίνακες των συντελεστών των συμμεταβλητοτήτων

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}_{\hat{a}} = (\mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F})^{-1} \\
&\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{A}\,\mathbf{Q}_x \\
&\mathbf{Q}_{\hat{v}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{FL})\mathbf{A}\,\mathbf{Q} \qquad (20)
\end{aligned}$$

αν πολλαπλασιασθούν με τις αντίστοιχες συνιστώσες της μεταβλητότητας αναφοράς.

Για τον υπολογισμό των μεταβλητοτήτων αναφοράς και γενικότερα, των διαστημάτων εμπιστοσύνης και των στατιστικών ποσοτήτων που απαιτούνται για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων προτείνεται στη σχετική βιβλιογραφία η εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων Monte Carlo, σε αντικατάσταση των κλασικών τεχνικών του νόμου μετάδοσης (συμ)μεταβλητοτήτων, για λόγους ακρίβειας, εξαιτίας κυρίως των σφαλμάτων γραμμικοποίησης των μη γραμμικών εξισώσεων και των σφαλμάτων στρογγύλευσης που προκύπτουν στην ανάλυση μεγάλου αριθμού δεδομένων κυρίως κατά την αντιστροφή μεγάλων πινάκων. Οι μέθοδοι αυτές γενικεύονται και επεκτείνονται και στη λύση του προβλήματος εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς καθώς και στην εκτίμηση των αρχικών πινάκων (συμ)μεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων.

Οι παράμετροι **a** των αναλυτικών συναρτήσεων που περιγράφουν τα σφάλματα των οργάνων αντιμετωπίζονται είτε ως άγνωστες παράμετροι χωρίς καμία άλλη πληροφορία, είτε ως παράμετροι με βάρη. Στη δεύτερη περίπτωση οδηγούμαστε σε μια υβριδική λύση, όπου αντιμετωπίζεται το πρόβλημα υπολογισμού ενός πίνακα βάρους **W** των παραμέτρων **a**, γνωστό στη γενικότερη γεωδαιτική ορολογία ως πρόβλημα "επιλογής της νόρμας" και σχετίζεται με την ομαλότητα της επιλεγμένης αναλυτικής συνάρτησης (Δερμάνης 1984, 1987).

Σε μια πιο αυστηρή προσέγγιση, είναι δυνατή και μια συνδυασμένη αναλυτική - στοχαστική αντιμετώπιση των εσωτερικών σφαλμάτων των οργάνων μέτρησης. Ένα τμήμα των άγνωστων συναρ-

τήσεων που περιγράφουν τα εσωτερικά σφάλματα, η κυρίαρχη τάση όπως ονομάζεται στη σχετική ορολογία, περιγράφεται μέσω ενός γραμμικού συνδυασμού των αναλυτικών συναρτήσεων και ένα μικρό μέρος που απομένει μπορεί να αντιμετωπισθεί ως στοχαστική παράμετρος, με τη βοήθεια μιας συνάρτησης συμμεταβλητότητας. Τα σφάλματα των οργάνων προσεγγίζονται από σχέση της μορφής $\mathbf{F}\,\mathbf{a}+\mathbf{s}$, όπου $\mathbf{a}$ είναι οι άγνωστες ντετερμινιστικές παράμετροι και $\mathbf{s}$ οι στοχαστικές μεταβλητές.

Τέλος, σχετικά με τη λύση του απλοποιημένου μοντέλου $\mathbf{b}=\mathbf{F}\,\mathbf{a}+\mathbf{v}$, μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της προσαρμογής μιας συνάρτησης σε αβέβαια δεδομένα συνίσταται στην περιγραφή των συντεταγμένων των σημείων όλων των εποχών με τις τεχνικές της ασαφούς λογικής. Οι παράμετροι παραμόρφωσης αντιμετωπίζονται ως ασαφείς αριθμοί σε ένα ασαφές μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης, που καθιστά δυνατή την εισαγωγή πληροφοριών με τη λογική της δημιουργίας ενός έμπειρου συστήματος υπολογισμών. Από τη διαδικασία προκύπτουν εκτιμήσεις, που διαχωρίζουν την χωρική αβεβαιότητα από την αβεβαιότητα των παραμέτρων του μοντέλου και στατιστικά κριτήρια που αντικατοπτρίζουν την πιθανολογική αβεβαιότητα της παρεμβολής.

5. Οι στατιστικοί έλεγχοι

Στη συνέχεια περιγράφονται οι στατιστικοί έλεγχοι που εφαρμόζονται για να εξεταστεί αν τα σφάλματα του οργάνου είναι σημαντικά, σε σχέση με τα τυχαία σφάλματα των παρατηρήσεων. Πριν όμως από την εφαρμογή των στατιστικών αυτών μεθόδων, θα πρέπει να γίνει ο έλεγχος της αξιοπιστίας των παρατηρήσεων και της σωστής επιλογής του μαθηματικού και του στοχαστικού μοντέλου. Οι στατιστικοί έλεγχοι που εφαρμόζονται χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

α. Αξιολόγηση της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων, και
β. Έλεγχος σημαντικότητας των εσωτερικών σφαλμάτων των οργάνων.

Η έννοια της αξιοπιστίας σχετίζεται με τις αρχικές υποθέσεις, που αφορούν στις παρατηρήσεις, στις μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τις παρατηρήσεις με τις επιλεγμένες άγνωστες παραμέτρους και στην διαδικασία υπολογισμού αυτών των παραμέτρων. Αν αυτές οι αρχικές υποθέσεις δεν ισχύουν, τότε οι σχετική υπολογισμοί οδηγούν σε λανθασμένα αποτελέσματα. Η ορθότητα των αρχικών υποθέσεων ελέγχεται με την εφαρμογή του ελέγχου της γενικής υπόθεσης. Στα θέματα των βαθμονομήσεων των οργάνων μέτρησης, ο έλεγχος της γενικής υπόθεσης για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας εφαρμόζεται στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Έλεγχος μοντέλου (τα συστηματικά σφάλματα του οργάνου συμπεριφέρονται όπως περιγράφονται από τις συναρτήσεις που επιλέχτηκαν)
- Έλεγχος για την ύπαρξη χονδροειδών ή άλλων συστηματικών σφαλμάτων (εκτός από αυτά που περιγράφονται στις εξισώσεις των παρατηρήσεων) στις μετρήσεις.
- Έλεγχος των δεσμεύσεων και των γεωμετρικών συνθηκών που αναφέρονται στο πεδίο βαθμονόμησης.

Ένας αρχικός έλεγχος, για όλες τις παραπάνω υποθέσεις, γίνεται με τη βοήθεια του ολικού ελέγχου της μεταβλητότητας αναφοράς, αν είναι γνωστή η αρχική ακρίβεια των παρατηρήσεων. Αν ο ολικός έλεγχος γίνει δεκτός, τότε μπορούμε να πούμε ότι με τη συγκεκριμένη πιθανότητα το μαθηματικό μοντέλο (περιγραφή των εσωτερικών σφαλμάτων, διορθώσεις και αναγωγές των παρατηρήσεων κλπ.), καθώς και το στοχαστικό μοντέλο είναι σωστά. Μπορεί ο ολικός έλεγχος να αποτελέσει και τον στατιστικό έλεγχο σχετικά με τη σωστή λειτουργία του οργάνου; Ναι, όταν οι μετρήσεις γίνονται πάνω σε γνωστό πεδίο βαθμονόμησης.

Οι διάφορες μορφές του ελέγχου της γενικής υπόθεσης, όπως χρησιμοποιείται στις παραπάνω περιπτώσεις, δίνονται στη συνέχεια.

5.1 Έλεγχοι για την ύπαρξη χονδροειδών σφαλμάτων στις παρατηρήσεις

Ο έλεγχος αυτός γίνεται με την τεχνική της "σάρωσης δεδομένων". Για κάθε παρατήρηση y_i^b υπολογίζονται οι ποσότητες

$$\tau_i = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}(\hat{v}_i)} \quad , \quad t_i = \tau_i \sqrt{\frac{f-1}{f-\tau_i^2}} \tag{21}$$

όπου τ_i είναι το "εσωτερικά ομαλοποιημένο σφάλμα", $\hat{\sigma}(\hat{v}_i) = \hat{\sigma}\sqrt{[\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}]_{ii}}$ είναι η τυπική απόκλιση της εκτίμησης του σφάλματος $\hat{v}_i$, t_i το εξωτερικά ομαλοποιημένο σφάλμα, f είναι οι βαθμοί ελευθερίας και $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$ ο πίνακας των συντελεστών των συμμεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των σφαλμάτων $\hat{\mathbf{v}}$. Στη συνέχεια, ελέγχεται αν ισχύει η σχέση

$$\left| t_i \right| \le t_{f-1}^{\alpha_o/2} \tag{22}$$

ή ισοδύναμα, αν πάρουμε υπόψη μας τις σχέσεις (21) και ότι $t_{f-1}^{\alpha_o/2} = \sqrt{F_{1,f-1}^{\alpha_o}}$

$$\left| \tau_i \right| \le \sqrt{\frac{f\, F_{1,f-1}^{\alpha_o}}{f-1+F_{1,f-1}^{\alpha_o}}} = \tau_{f-1}^{\alpha_o/2} \tag{23}$$

όπου το επίπεδο σημαντικότητας α_o παίρνει συνήθως τιμές από 0.001 (για συνηθισμένες εφαρμογές), έως 0.01 (για εφαρμογές υψηλής ακριβείας).

Αν θεωρήσουμε την αρχική ακρίβεια των παρατηρήσεων γνωστή, ο έλεγχος γίνεται σύμφωνα με τη σχέση

$$z_i = \frac{\hat{v}_i}{\sigma(\hat{v}_i)} \le z^{\alpha/2} \tag{24}$$

όπου $\sigma(\hat{v}_i) = \sigma_o\sqrt{[\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}]_{ii}}$ είναι η τυπική απόκλιση της εκτίμησης του σφάλματος $\hat{v}_i$, σ_o^2 η γνωστή μεταβλητότητα αναφοράς και $z^{\alpha/2}$ το εκατοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής.

5.2 Έλεγχος συμβατότητας δύο ομάδων παρατηρήσεων

Ο έλεγχος των παρατηρήσεων της μιας ομάδας συνολικά (π.χ. του πρότυπου οργάνου), σε σχέση με τις παρατηρήσεις της άλλης ομάδας (π.χ. του οργάνου που ελέγχεται), που στην ουσία αποτελεί τη γενίκευση της σάρωσης δεδομένων για μια ομάδα παρατηρήσεων, μπορεί να γίνει ή από τα αποτελέσματα της ταυτόχρονης συνόρθωσης των παρατηρήσεων των δύο ομάδων, ή από τα αποτελέσματα της συνόρθωσης των παρατηρήσεων της μιας ομάδας και την εφαρμογή μεθόδων πρόγνωσης για τον υπολογισμό των στατιστικών στοιχείων της δεύτερης ομάδας. Και οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Στην πρώτη περίπτωση ο έλεγχος βασίζεται στις σχέσεις

$$T = \frac{\hat{\mathbf{v}}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \hat{\mathbf{v}}_2}{n_2\, \hat{\sigma}^2} \quad , \quad F = T\,\frac{f-n_2}{f-n_2\,T} \tag{25}$$

και

$$F \le F_{n_2,f-n_2}^{\alpha} \tag{26}$$

ή ισοδύναμα

$$T \le \frac{f\, F_{n_2,f-n_2}^{\alpha}}{f-n_2+n_2\, F_{n_2,f-n_2}^{\alpha}} = T_{n_2,f-n_2}^{\alpha} \tag{27}$$

όπου ο δείκτης (2) αναφέρεται στους υποπίνακες που αντιστοιχούν στις n_2 παρατηρήσεις που ελέγχονται, και ο πίνακας $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{N}^g\mathbf{A}_2^T$ είναι υποπίνακας των συντελεστών συμμεταβλητοτήτων $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$ των σφαλμάτων $\hat{\mathbf{v}}$ που αντιστοιχεί στις παρατηρήσεις αυτές (στα σφάλματα $\hat{\mathbf{v}}_2$).

Στη δεύτερη περίπτωση, ο έλεγχος βασίζεται στον εναλλακτικό τύπο

$$F = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_2^T\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}_2}{n_2\,\hat{\sigma}_1^2} \le F^{\alpha}_{n_2, f-n_2} \tag{28}$$

όπου $\tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{y}_2^b - \tilde{\mathbf{y}}$ είναι η πρόγνωση των σφαλμάτων της δεύτερης ομάδας των παρατηρήσεων ($\tilde{\mathbf{y}} = f(\hat{\mathbf{x}})$), η οποία γίνεται με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης της πρώτης ομάδας, και $\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ είναι ο αντίστοιχος πίνακας συμμεταβλητοτήτων.

Πίνακας 3. Έλεγχος της προϋπάρχουσας πληροφορίας του πεδίου βαθμονόμησης από τις παρατηρήσεις του οργάνου που ελέγχεται

Εκτίμηση	Πρόγνωση	Έλεγχος
$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{x} + \mathbf{v}_1$ ή $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\,\mathbf{a} + \mathbf{v}_1$ $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathbf{Q}_{\hat{x}}$	$\mathbf{b}_o = \mathbf{A}_o\,\mathbf{x} + \mathbf{v}_o$ $\tilde{\mathbf{v}}_o = \mathbf{b}_o - \mathbf{A}_o\,\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$ $\mathbf{Q}_{\tilde{v}} = P_o^{-1} + \mathbf{A}_o\,\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{A}_o^T$	$F = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_o^T\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}_o}{n_o\,\hat{\sigma}_1^2} \le F^{\alpha}_{n_o, f_1}$
	$\mathbf{x}_o = \mathbf{x} + \mathbf{v}_o$ $\tilde{\mathbf{v}}_o = \mathbf{x}_o - \hat{\mathbf{x}}^{(1)}$ $\mathbf{Q}_{\tilde{v}} = \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_{\hat{x}}$	

5.3 Έλεγχοι σχετικοί με τις δεσμεύσεις των παραμέτρων αναφοράς

Σε όλους τους παραπάνω ελέγχους η μηδενική υπόθεση $H_o : \mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$, ελέγχεται σε σχέση με την εναλλακτική της $H_a : \mathbf{H}\,\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$ και γίνεται αποδεκτή για επίπεδο σημαντικότητας α, αν ισχύει η σχέση

$$F = \frac{(\mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z})^T(\mathbf{H}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T)^{-1}(\mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z})}{k\,\hat{\sigma}^2} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}^{-1}\,\hat{\mathbf{e}}}{k\,\hat{\sigma}^2} \le F^{\alpha}_{k,f} \tag{29}$$

όπου $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}$ είναι τα σφάλματα κλεισίματος, $\mathbf{S} = \mathbf{H}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathbf{H}^T$ ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων τους, k είναι ο αριθμός των εξισώσεων της γενικής υπόθεσης και οι εκτιμήσεις $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\sigma}^2$, καθώς και ο πίνακας $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, αναφέρεται στη λύση των εξισώσεων $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{v}$ ή $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{F}\,\mathbf{a} + \mathbf{v}$ (χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι δεσμεύσεις $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$). Εναλλακτικοί τύποι για τον υπολογισμό της ποσότητας F είναι

$$F = \frac{f}{k}\frac{\delta\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}} = \frac{f}{k}\frac{\delta\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}_H - \delta\hat{\varphi}} \tag{30}$$

όπου $f + k = f_H$, $\delta\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_H - \hat{\varphi} = \hat{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}^{-1}\,\hat{\mathbf{e}}$ και $\hat{\varphi}_H = \hat{\mathbf{v}}_H^T\,\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}_H$ είναι το κριτήριο που ελαχιστοποιείται λαμβάνοντας υπόψη και τις εξισώσεις $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$ ως δεσμεύσεις και $\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{v}}^T\,\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}$ είναι το κριτήριο που ελαχιστοποιείται χωρίς τις παραπάνω δεσμεύσεις, f_H είναι οι βαθμοί ελευθερίας με τις δεσμεύσεις που ελέγχονται, και f είναι οι βαθμοί ελευθερίας των υπολογισμών χωρίς αυτές τις δεσμεύσεις. Αν θεωρήσουμε γνωστή την ακρίβεια των παρατηρήσεων ο έλεγχος βασίζεται στη σχέση

$$F = \frac{\delta\hat{\varphi}}{k\,\sigma_o^2} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}^{-1}\,\hat{\mathbf{e}}}{k\,\sigma_o^2} \leq \; F_{k,\infty}^{\alpha} \tag{31}$$

όπου σ_o^2 η γνωστή μεταβλητότητα αναφοράς.

Σύμφωνα με το διαχωρισμένο αλγόριθμο, οι δεσμεύσεις αυτές μπορούν να εισαχθούν μια-μια χωριστά και όχι ταυτόχρονα όλες μαζί. Έτσι έχουμε τη δυνατότητα ελέγχου κάθε δέσμευσης σε σχέση με τις προηγούμενες λύσεις. Η υλοποίηση του αλγόριθμου γίνεται ως εξής:

1. Αρχική λύση χωρίς δεσμεύσεις (υπολογίζονται οι πίνακες $\hat{\mathbf{x}}_o$ και $\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(o)}$).

2. Εισάγουμε μία-μία τις δεσμεύσεις και παίρνουμε διαδοχικά τις αντίστοιχες λύσεις μέχρι την ολοκλήρωση της εισαγωγής όλων των δεσμεύσεων. Η εισαγωγή για παράδειγμα της k δέσμευσης $\mathbf{h}^T\mathbf{x} = z$, όπου $\mathbf{h}^T$ είναι η k σειρά του πίνακα $\mathbf{H}$, γίνεται ως εξής: Υπολογίζονται οι ποσότητες

$$\hat{e} = \mathbf{h}^T\,\hat{\mathbf{x}}^{(k-1)} - z = \sum_r h_r\hat{x}_r^{(k-1)} - z \tag{32}$$

$$q^2(\hat{e}) = \mathbf{h}^T\,\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}\mathbf{h} = \sum_r h_r h_s[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}]_{rs} \tag{33}$$

όπου h_r, h_s είναι τα στοιχεία r και s αντίστοιχα του πίνακα $\mathbf{h}$ και $[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}]_{rs}$ είναι το στοιχείο της r γραμμής και της s στήλης του πίνακα $\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}$. Ο πίνακας είναι αυτός που προέκυψε από τις προηγούμενες $k-1$ δεσμεύσεις. Όταν εισάγεται η πρώτη δέσμευση ο πίνακας αυτός είναι ο $\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(o)}$. Το διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}}^{(k-1)}$είναι η λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων με τις προηγούμενες $k-1$ δεσμεύσεις. Όταν η δέσμευση k είναι η πρώτη δέσμευση, το διάνυσμα αυτό είναι το $\hat{\mathbf{x}}_o$. Ελέγχεται η ορθότητα της δέσμευσης

$$\frac{\hat{e}^2}{\hat{\sigma}_{k-1}^2\,q^2(\hat{e})} \;\sim\; F_{1,f_{k-1}} \tag{34}$$

και στη συνέχεια, αν γίνει αποδεκτή, η κάθε συντεταγμένη $\hat{x}_i^{(k)}$ του διανύσματος $\hat{\mathbf{x}}$ προκύπτει από τον τύπο

$$\hat{x}_i^{(k)} = \hat{x}_i^{(k-1)} - \delta\hat{x}_i^{(k)} = \hat{x}_i^{(k-1)} - \frac{\hat{e}}{q^2(\hat{e})}\sum_r[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}]_{ir}h_r \tag{35}$$

και το κάθε στοιχείο $[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k)}]_{ij}$ του πίνακα $[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k)}]$, από τον τύπο

$$[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k)}]_{ij} = [\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}]_{ij} - \frac{1}{q^2(\hat{e})}\sum_r\left\{[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}]_{ir}h_r\sum_s[\mathbf{Q}_{\hat{x}}^{(k-1)}]_{sj}h_s\right\} \tag{36}$$

Σε όλους τους παραπάνω τύπους, οι αθροίσεις γίνονται μόνο για τις συντεταγμένες που συμμετέχουν στην δέσμευση.

5.4 Έλεγχοι σημαντικότητας και επιλογή των πρόσθετων παραμέτρων

Ο έλεγχος σημαντικότητας των εσωτερικών σφαλμάτων των οργάνων γίνεται απευθείας στις εκτιμήσεις των πρόσθετων παραμέτρων από τη λύση των διευρυμένων εξισώσεων των παρατηρήσεων $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{F}\,\mathbf{a} + \mathbf{v}$, ή με βάση τα αποτελέσματα των απλοποιημένων εξισώσεων $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{v}$, όπου δηλαδή δεν συμπεριλαμβάνονται οι πρόσθετες παράμετροι. Στη δεύτερη περίπτωση ο έλεγχος ακολουθεί συνήθως τη σάρωση δεδομένων όταν φαίνεται να υπάρχει ένα γενικότερο πρόβλημα αξιοπιστίας και όχι κάποια χονδροειδή σφάλματα σε μία ή δύο παρατηρήσεις.

Ο ολικός έλεγχος των πρόσθετων παραμέτρων ($H_o : \mathbf{a} = \mathbf{0}, H_a : \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) προκύπτει στην ουσία ως σύγκριση των λύσεων του απλού και διευρυμένου συστήματος των εξισώσεων των παρατηρήσε-

ων. Μπορεί να προκύψει από τα αποτελέσματα της λύσης του διευρυμένου συστήματος των εξισώσεων των παρατηρήσεων $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{F}\,\mathbf{a} + \mathbf{v}$ με τη βοήθεια της σχέσης

$$F = \frac{\hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{Q}_{\hat{a}}^{-1}\,\hat{\mathbf{a}}}{m\,\hat{\sigma}_\delta^2} \;\le\; F_{m,f_\delta}^{\alpha} \tag{37}$$

όπου οι βαθμοί ελευθερίας f_δ και η μεταβλητότητα αναφοράς $\hat{\sigma}_\delta^2$ αναφέρονται στη λύση του διευρυμένου μοντέλου, ή μπορεί να προκύψει από τη σύγκριση της λύσης του απλού συστήματος των εξισώσεων των παρατηρήσεων $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{v}$ με αυτήν του διευρυμένου, σύμφωνα με τη σχέση

$$F = \frac{f - m}{m}\,\frac{\delta\hat{\varphi}}{f\,\hat{\sigma}^2 - \delta\hat{\varphi}} \;\le\; F_{m,f-m}^{\alpha} \tag{38}$$

όπου $\hat{\varphi}$, f είναι η τιμή του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων και οι βαθμοί ελευθερίας κατά τη λύση του απλού μοντέλου, ενώ $\delta\hat{\varphi} = \hat{\varphi} - \hat{\varphi}_\delta$ είναι η διαφορά ανάμεσα στην τιμές των δύο κριτηρίων. Αποδεικνύεται ότι η τιμή $\delta\hat{\varphi}$ μπορεί να υπολογιστεί και απευθείας από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων παρατήρησης $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{v}$, σύμφωνα με τη σχέση

$$\delta\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\,\mathbf{F}\left[\mathbf{F}^T \mathbf{P}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}\mathbf{P}\,\mathbf{F}\right]^{-1}\mathbf{F}^T \mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}} \tag{39}$$

Αν ισχύει η σχέση (37) ή η εναλλακτική της (38), τότε θεωρούμε ότι ο όρος $\mathbf{F}\,\mathbf{a}$ είναι ασήμαντος, διαφορετικά τα σφάλματα είναι σημαντικά και πρέπει να προχωρήσουμε στην πιο αναλυτική επιλογή των παραμέτρων **a**.

$$\text{Έστω } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_I \\ \mathbf{a}_{II} \end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_I & \mathbf{Q}_{I,II} \\ \mathbf{Q}_{I,II}^T & \mathbf{Q}_{II} \end{bmatrix} \tag{40}$$

όπου $\mathbf{a}_{II}$ η ομάδα των παραμέτρων των συναρτήσεων f_i που ελέγχονται για τη σημαντικότητά τους. Για τον έλεγχο σημαντικότητας των παραμέτρων $\mathbf{a}_{II}$ ($H_o : \mathbf{a}_{II} = \mathbf{0} \sim H_a : \mathbf{a}_{II} \neq \mathbf{0}$) χρησιμοποιούνται οι σχέσεις

$$F_{II} = \frac{\hat{\mathbf{a}}_{II}^T\,\mathbf{Q}_{II}^{-1}\,\hat{\mathbf{a}}_{II}}{m_{II}\hat{\sigma}_\delta^2}\;,\quad F_{II} \;\le\; F_{m_{II},f_\delta}^{\alpha} \tag{41}$$

όπου m_{II} είναι ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων $\mathbf{a}_{II}$.

Σχετικά με τον έλεγχο σημαντικότητας μιας μόνο παραμέτρου ($H_o : a_i = 0 \sim H_a : a_i \neq 0$), αν ισχύει η σχέση

$$\left|t_i\right| = \left|\frac{\hat{a}_i}{\hat{\sigma}\,q(\hat{a}_i)}\right| \;>\; t_f^{\alpha/2} = \sqrt{F_{1,f}^{\alpha}} \quad \text{όπου} \quad q(\hat{a}_i) = \sqrt{\left\{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}\right\}_{ii}} \tag{42}$$

η παράμετρος $\hat{a}_i$ είναι σημαντική.

Σημαντικό πρόβλημα για τον έλεγχο και την επιλογή των πρόσθετων παραμέτρων **a** δημιουργούν οι συσχετίσεις, τόσο μεταξύ των πρόσθετων παραμέτρων, όσο και μεταξύ των πρόσθετων και των άλλων παραμέτρων των υπολογισμών. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, μια τεχνική βασίζεται στον έλεγχο σημαντικότητας μιας παραμέτρου, ή ομάδας παραμέτρων, που δεν συμμετέχουν στις σχετικές εξισώσεις και που πρόκειται όμως να συμπεριληφθούν, αν ο έλεγχος δείξει ότι είναι σημαντικές. Η σημαντικότητα των νέων πρόσθετων παραμέτρων $\mathbf{a}_*$, με πίνακα συντελεστών $\mathbf{F}_*$, που δεν συμπεριλαμβάνονται στο αρχικό σύστημα εξισώσεων **b** = **A x** + **F a** + **v**, ελέγχεται με βάση τη σχέση

$$F = \frac{f-q}{q}\frac{\delta\hat{\varphi}}{f\,\hat{\sigma}^2 - \delta\hat{\varphi}} \;\le\; F^{\alpha}_{q,f-q} \tag{43}$$

όπου $\delta\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\,\mathbf{F}_*\left[\mathbf{F}_*^T\mathbf{P}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}\mathbf{P}\,\mathbf{F}_*\right]^{-1}\mathbf{F}_*^T\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}$ (44)

q είναι ο αριθμός των νέων πρόσθετων παραμέτρων $\mathbf{a}_*$ και οι ποσότητες f, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$, $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\sigma}^2$ αναφέρονται στις αρχικές εξισώσεις, χωρίς τις παραμέτρους αυτές. Για μία παράμετρο a_*, με διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{f}_*^T$, ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$t = r\sqrt{\frac{f-1}{f-r^2}} \;\le\; t^{\alpha/2}_{f-1} \qquad \text{όπου} \qquad r^2 = \frac{\left[\mathbf{f}_*^T\mathbf{P}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}^{-1}\,\hat{\mathbf{v}}\right]^2}{\hat{\sigma}^2\,\mathbf{f}_*^T\mathbf{P}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}\mathbf{P}\,\mathbf{f}_*} \tag{45}$$

Πρέπει στο σημείο αυτό να τονίσουμε πως η γενική υπόθεση επιτρέπει τη σύγκριση μόνο δύο υποθέσεων που αντιστοιχούν σε μαθηματικά μοντέλα τέτοια ώστε το ένα, αυτό της μηδενικής υπόθεσης, να αποτελεί "ενφωλιασμένη" μορφή του άλλου, εκείνου της εναλλακτικής υπόθεσης. Στην περίπτωση όμως της βαθμονόμησης των οργάνων μέτρησης, μέσα στα διαφορετικά εναλλακτικά μαθηματικά μοντέλα συμπεριλαμβάνονται και περιπτώσεις όπου ένα μοντέλο δεν μπορεί να αποτελέσει ενφωλιασμένη μορφή του άλλου, και επομένως η εφαρμογή της γενικής υπόθεσης σαν εργαλείο σύγκρισης είναι αδύνατη.

Εκτός από τους παραπάνω ελέγχους, που στηρίζονται στην εφαρμογή του γνωστού από τη θεωρία εκτίμησης εργαλείου της στατιστικής ερμηνείας που ονομάζεται "έλεγχος της γενικής υπόθεσης" και που εφαρμόζονται στα αποτελέσματα της τελικής ανάλυσης των παρατηρήσεων, κατά την αρχική επεξεργασία επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, μπορούν να εφαρμοσθούν, και πολλές φορές απαιτούνται, και άλλοι έλεγχοι, συνήθως οι γνωστοί ως μη παραμετρικοί, όπως είναι ο ο έλεγχος της κατανομής των παρατηρήσεων, ο έλεγχος τυχαιότητας, κλπ.

5.5 Κριτήρια ποιότητας για τον σχεδιασμό του πεδίου βαθμονόμησης

Πριν προχωρήσουμε στην τελική υλοποίηση του πεδίου βαθμονόμησης που έχει σχεδιασθεί, θα πρέπει να αξιολογηθεί η ποιότητά του. Αξιολόγηση ποιότητας σημαίνει:

Έλεγχος της ακρίβειας: Συνίσταται στην αρχική εκτίμηση των κριτηρίων ακρίβειας των εσωτερικών σφαλμάτων του οργάνου, για τα οποία έχει σχεδιασθεί το πεδίο βαθμονόμησης.

Έλεγχος της αξιοπιστίας: Αναφέρεται στα κριτήρια αξιοπιστία των στατιστικών ελέγχων που εφαρμόζονται ώστε να γίνουν αποδεκτά τα αποτελέσματα της βαθμονόμησης (Ρωσσικόπουλος 1999, Δούκας και Ρωσσικόπουλος 2010). Π.χ. να γνωρίζουμε πόσο μεγάλα είναι τα πιθανά χονδροειδή σφάλματα σε κάθε παρατήρηση που απορροφώνται στην ανάλυση των παρατηρήσεων και εμφανίζονται ως σφάλματα οργάνου κατά τη βαθμονόμηση (έλεγχος εσωτερικής αξιοπιστίας), και πώς επιδρούν τα χονδροειδή αυτά σφάλματα στις τελικές εκτιμήσεις των εσωτερικών σφαλμάτων (έλεγχος εξωτερικής αξιοπιστίας).

Επειδή στις μετρήσεις η πιο συνηθισμένη αιτία για αναξιόπιστα αποτελέσματα είναι τα χονδροειδή σφάλματα, για τον λόγο αυτό και η έννοια της αξιοπιστίας, όπως εμφανίζεται στη σχετική βιβλιογραφία, συνδέεται με την ύπαρξη χονδροειδών σφαλμάτων στις τιμές των μετρήσεων.

Αυτό που ενδιαφέρει ιδιαίτερα κατά τον σχεδιασμό του πεδίου βαθμονόμησης, είναι να καταλήξουμε σ' ένα τέτοιο σχήμα ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέγεθος του σφάλματος (χονδροειδούς ή συστηματικού που δεν περιγράφεται στο διευρυμένο μοντέλο) κάθε μέτρησης, που μπορεί να "αφομοιωθεί" κατά τους υπολογισμούς, αλλά και να ελαχιστοποιηθεί η "μεταβολή" των παραμέτρων που ορίζουν το πεδίο βαθμονόμησης καθώς και των παραμέτρων που περιγράφουν τα εσωτερικά σφάλματα, εξαιτίας του σφάλματος αυτού. Η επίδραση του οριακού χονδροειδούς σφάλματος μιας μέτρησης πάνω στις εκτιμήσεις των παραμέτρων, που περιγράφουν το πεδίο και

τα εσωτερικά σφάλματα των οργάνων, ονομάζεται εξωτερική αξιοπιστία. Κατά τον σχεδιασμό του πεδίου βαθμονόμησης θα πρέπει τα κριτήρια της εξωτερικής αξιοπιστίας να είναι μικρότερα ή το πολύ ίσα με την απόδοση του οργάνου.

Στην περίπτωση όμως των βαθμονομήσεων των οργάνων μέτρησης, είναι εξίσου σημαντική η αξιολόγηση της αξιοπιστίας κάθε στατιστικού ελέγχου που εφαρμόζεται στα αποτελέσματα των υπολογισμών. Για παράδειγμα, σχετικά με την αξιοπιστία του ελέγχου της γενικής υπόθεσης που αναφέρεται στις παραμέτρους αναφοράς που ορίζουν το πεδίο βαθμονόμησης, θα πρέπει να αναλυθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

- Μήπως ο έλεγχος της γενικής υπόθεσης δεν περνά επειδή τα σφάλματα κλεισίματος των υποθέσεων που ελέγχονται δέχονται την επίδραση ενός χονδροειδούς σφάλματος που αφομοιώθηκε στους σχετικούς υπολογισμούς;
- Ποιό είναι το οριακό μέγεθος του σφάλματος κλεισίματος μιας υπόθεσης που αναφέρεται στο πεδίο βαθμονόμησης και που θεωρείται σημαντικό στον αντίστοιχο στατιστικό έλεγχο;
- Ποια είναι η επίδραση ενός τέτοιου σφάλματος στα τελικά αποτελέσματα αν οι συνθήκες που ελέγχονται συμπεριληφθούν ως δεσμεύσεις στην ανάλυση των μετρήσεων;

Σχετικά με την αξιοπιστία του ελέγχου σημαντικότητας των πρόσθετων παραμέτρων που περιγράφουν τη συμπεριφορά των εσωτερικών σφαλμάτων του οργάνου μέτρησης θα πρέπει να αναλυθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

- Μήπως μία παράμετρος είναι σημαντική επειδή δέχεται την επίδραση ενός χονδροειδούς σφάλματος που αφομοιώθηκε στους σχετικούς υπολογισμούς;
- Ποιό είναι το οριακό μέγεθος της παραμέτρου που μπορεί να δείξει ο στατιστικός έλεγχος ότι είναι σημαντική; Αν η υπολογισμένη τιμή της παραμέτρου είναι μικρότερη από το μέγεθος αυτό τότε ο έλεγχος δεν είναι αξιόπιστος.
- Ποια είναι η επίδραση στα τελικά αποτελέσματα αν αποφασισθεί λάθος ότι η παράμετρος δεν είναι σημαντική ως συνιστώσα περιγραφής του σφάλματος του οργάνου και αφαιρεθεί από τους υπολογισμούς;

6. Ο έλεγχος της ακρίβειας των οργάνων μέτρησης

Ο έλεγχος της ακρίβειας του οργάνου, μπορεί να γίνει κατά τη βαθμονόμησή του αν αυτό επιτρέπεται από το πεδίο βαθμονόμησης, ή διαφορετικά αποτελεί μια χωριστή διαδικασία. Και στις δύο περιπτώσεις θα πρέπει να αναλυθούν οι επιδράσεις όλων των σφαλμάτων στην ακρίβεια της μέτρησης και οι επιδράσεις που δεν συμπεριλαμβάνονται στο διευρυμένο μαθηματικό μοντέλο να εμφανισθούν ως συνιστώσες της τελικής ακρίβειας. Στη συνέχεια, να εφαρμοσθούν πολυπλοκότερα μοντέλα συνόρθωσης, όπως είναι για παράδειγμα η εκτίμηση και ο έλεγχος των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς ή μέθοδοι ανάλυσης πολλών μεταβλητών. Η τελική ακρίβεια προκύπτει ως η συνισταμένη του μέρους εκείνου που προέρχεται από τις τεχνικές εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς, καθώς και του μέρους εκείνου που προέρχεται από τις εκτιμήσεις των μεταβλητοτήτων των εσωτερικών σφαλμάτων που υπολογίζονται κατά η βαθμονόμηση.

Το τελικό σφάλμα μιας παρατήρησης όπως έχει ήδη αναφερθεί, προκύπτει από αθροιστικές επιδράσεις πολλών επιμέρους σφαλμάτων, όπως: τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου που δεν απαλείφονται ακολουθώντας ειδικές τεχνικές κατά τη μέτρηση, β) τα σφάλματα του περιβάλλοντος και γ) τα σφάλματα των επιμέρους χειρισμών που κάνει ο παρατηρητής. Μια αρχική ανάλυση της ακρίβειας των παρατηρήσεων βασίζεται στην περιγραφή, με τη βοήθεια μαθηματικών σχέσεων, των σφαλμάτων που επηρεάζουν τις παρατηρήσεις στη συγκεκριμένη τεχνική μέτρησης που ακολουθείται, και στην εφαρμογή του νόμου μετάδοσης των συμμεταβλητοτήτων στις σχέσεις αυτές. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε m διαφορετικές επιδράσεις στην τελική ακρίβεια των παρατηρήσεων, ο πίνακας των μεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων γράφεται

$$E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C} = \sigma_1^2\mathbf{V}_1 + \sigma_2^2\mathbf{V}_2 + ... + \sigma_m^2\mathbf{V}_m \quad (46)$$

όπου $\sigma_i^2,\ i = 1,2,...,m$ είναι οι άγνωστες συνιστώσες και $\mathbf{V}_i$ είναι οι γνωστοί πίνακες των συντελεστών συμμεταβλητοτήτων. Ένα εργαλείο της στατιστικής, χρήσιμο για τη λύση του παραπάνω προβλήματος, είναι η μέθοδος εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς (Variance Component Estimation).

Εφαρμογή του προβλήματος των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς, εκτός από την ανάλυση της ακρίβειας ενός οργάνου έχουμε για τον υπολογισμό της σχέσης μεταξύ των βαρών διαφορετικών παρατηρήσεων (όπως είναι π.χ. οι παρατηρήσεις του πρότυπου οργάνου και του οργάνου που ελέγχεται κατά τη σχετική βαθμονόμηση), ή για τον υπολογισμό της σχέσης των βαρών παρατηρήσεων που έγιναν σε διαφορετικές εποχές ή σε διαφορετικές συνθήκες.

Κατά τη βαθμονόμηση των οργάνων δεν είναι πάντοτε δυνατή η ανάλυση της ακρίβειας του οργάνου που ελέγχεται, επειδή δεν μπορούν να ορισθούν όλες οι συνιστώσες της. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, ο έλεγχος της ακρίβειας γίνεται διαχωρισμένα από τη βαθμονόμηση, σε άλλο πεδίο μετρήσεων.

Για να εφαρμοσθούν οι μέθοδοι αυτές και να είναι εκτιμήσιμες οι συνιστώσες της ακρίβειας του οργάνου, θα πρέπει και το πεδίο των μετρήσεων να είναι ειδικά σχεδιασμένο, αλλά και τα μεγέθη που μετριούνται να είναι τέτοια ώστε οι συνιστώσες της ακρίβειας να είναι σημαντικές. Για παράδειγμα, κατά την βαθμονόμηση του EDM σε μια εργαστηριακή βάση για το κυκλικό σφάλμα, δεν μπορεί να ελεγχθεί η ακρίβεια του οργάνου επειδή η βάση έχει μήκος το πολύ 100 μέτρα και η συνιστώσα που εκφράζει τις επιδράσεις των σφαλμάτων κλίμακας στην τελική ακρίβεια δεν προσδιορίζεται. Σε μια τέτοια βάση όλες οι αποστάσεις θεωρούνται ίσης ακρίβειας. Γενικά ένα πεδίο βαθμονόμησης είναι ειδικά σχεδιασμένο έτσι ώστε ορισμένες επιδράσεις να απαλείφονται ή να ελαχιστοποιούνται.

Βιβλιογραφία

Δερμάνης, Α. (1984): Θεωρία και εφαρμογή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής σε τοπογραφικά προβλήματα. *Γεωδαιτικά Τετράδια*, τομ. 5, No. 2. σελ. 125-162.

Δερμάνης, Α. (1987): *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης*. Εκδόσεις Ζήτη.

Dermanis, A. (1991): A Unified Approach to Linear Estimation and Prediction. *XXth Congress of the International Union of Geodesy and Geophysics*. IAG, Vienna, August 11-24, 1991.

Δούκας Ι., Δ. Ρωσσικόπουλος (2010). Η αξιοπιστία των στατιστικών ελέγχων. 3*ο Τακτικό Εθνικό Συνέδριο Μετρολογίας*. Λάρνακα, Κύπρος, 5-6 Φεβρουαρίου.

Rao, C. R. (1973): *Linear Statistical Inference and Its Applications*. J. Wiley.

Ρωσσικόπουλος, Δ. (1989): Σχεδιασμός της βάσης και ανάλυση των παρατηρήσεων για τον έλεγχο και την βαθμονόμηση των ηλεκτρονικών οργάνων μέτρησης αποστάσεων. *Ερατοσθένης*, 26, 277-312.

Ρωσσικόπουλος, Δ. (1999): *Τοπογραφικά δίκτυα και υπολογισμοί*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Schaffrin, B. (1985): A Calibration Model for Geodetic Applications. *International Statistical Institute, 45th Session, Contributed Papers, Book 2*, 12-22 August, Amsterdam, pp. 523-525.