ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΕΤΡΟΛΟΓΙΑ: ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

Ιωάννης Π. Ζώης
ΚΔΕΠ/ΔΕΗ, Λεονταρίου 9, Κάντζα Παλλήνη, 153 51 Αττική

e-mail: i.zois@dei.com.gr

Περίληψη

Στο παρόν άρθρο δίδουμε μια εναλλακτική προσέγγιση για τον ορισμό του μέτρου, της μονάδας SI μέτρησης του μήκους. Η προσέγγισή μας χρησιμοποιεί ιδέες από την μη-μεταθετική γεωμετρία και την κβαντική θεωρία πεδίων. Μια από της πιο δραματικές εξελίξεις των σύγχρονων μαθηματικών κατά τα τελευταία 20 χρόνια είναι η ανακάλυψη της λεγόμενης «μη-μεταθετικής γεωμετρίας» (ή «κβαντική γεωμετρία»). Η βασική έννοια της (κλασικής, μεταθετικής) μετρικής γεωμετρίας είναι η έννοια της Ρημάνιας πολλαπλότητας. Μια Ρημάνια πολλαπλότητα φέρει δύο βασικά δεδομένα: τοπολογικά δεδομένα και μετρικά δεδομένα που δίδονται από την Ρημάνια μετρική, μια ψευδο-θετική συμμετρική διγραμμική μορφή που ορίζεται στην εφαπτόμενη δέσμη της πολλαπλότητας. Τα τοπολογικά δεδομένα καθορίζουν τις ολικές ιδιότητες της πολλαπλότητας (δομή μεγάλης κλίμακας) ενώ η Ρημάνια μετρική παρέχει την δυνατότητα μέτρησης αποστάσεων (και συνεπώς και γωνιών, δομή μικρής κλίμακας, τοπική δομή). Η μη-μεταθετική γεωμετρία μπαίνει στο παιγνίδι μέσω του θεωρήματος Gelfand που δηλώνει ότι μπορεί κανείς να αποκαλύψει την τοπολογική δομή χρησιμοποιώντας την (μεταθετική) άλγεβρα των (μιγαδικών) συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στην πολλαπλότητα (οι συναρτήσεις συντεταγμένων). Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας την έννοια του λεγόμενου «(περιττού) K-κύκλου» μπορεί κανείς να αποκαλύψει και την Ρημάνια μετρική. Αυτό το τελευταίο είναι που μας ενδιαφέρει περισσότερο εδώ. Η έννοια ενός K-κύκλου βασίζεται στην ύπαρξη ενός μη-φραγμένου αυτο-συζυγούς τελεστή που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες. Δοθείσης μιας πολλαπλότητας, αυτή έχει φυσικά συνδεδεμένο έναν τελεστή τύπου Dirac που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορισθεί ένας K-κύκλος. Η φυσική επιλογή λοιπόν για την περίπτωσή μας είναι να θεωρήσουμε σαν πολλαπλότητα τον επίπεδο χωρόχρονο με μετρική Minkowski και τον γνωστό τελεστή Dirac της φυσικής (σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίων) και εφαρμόζοντας τεχνικές της μη-μεταθετικής γωμετρίας (τον λεγόμενο «κβαντικό λογισμό») κατασκευάζουμε τον διαδότη Dirac που μετρά μήκη. Με πολύ απλά λόγια, το σλόγκαν είναι πως μπορούμε να μετράμε μήκη αθροίζοντας συγκεκριμένες ιδιοτιμές του τελεστή Dirac που περιγράφει τα φερμιόνια στην κβαντική θεωρία πεδίων.

Λέξεις-Κλειδιά: K-κύκλος, τελεστής Dirac, μη-μεταθετική γεωμετρία, μέτρηση μήκους.

Abstarct

In this article we give an alternative definition of the meter, the SI unit for measuring length. Our approach uses ideas from noncommutative geometry and quantum field theory.One of the most dramatic developments in modern mathematics during the last 20 years or so is the invention of the so-called noncommutative geometry (or quantum geometry). The fundamental notion in metric geometry is the notion of the Riemannian manifold. A Riemannian manifold carries 2 basic pieces of data: topological data and metric data given by the Riemannian metric, a (semi)-positive bilinear form defined on the tangent bundle of the manifold. Topological data determine the global properties of the manifold (large scale structure) whereas the Riemannian metric enables one to measure lenghts (and hence angles, short scale structure or local structure). Noncommutative geometry enters the sceen by Gelfand's theorem which states that one can recover the topological structure using the algebra of coordinate functions defined on the manifold. In addition to this, by using the notion of the so called (odd) K-cycle one can recover the Riemannian metric. It is the later notion which is of primary concern to us here. The notion of an odd K-cycle is based on the existence of an unbounded self-adjoint operator satisfying certain conditions. Given any manifold (our spacetime we live in), it has a naturally associated Dirac type of operator which can be used to define a K-cycle. Then the natural choice for our purpose is to consider the actual Dirac operator used in physics (quantum field theory) and by applying various techniques of noncommutative geometry (the so-called quantized calculus) we construct the Dirac propagator which measures lenghts. In very simple words, the slogan is that one can measure lengths by taking the sum of certain eigenvalues of the Dirac operator which describes fermions in quantum field theory.

Keywords: K-cycle, Dirac operator, noncommutative geometry, measurement of length..

1. Εισαγωγή

Η μονάδα μέτρησης του μήκους στο σύστημα SI είναι το 1m. Αυτό ορίζεται ως το μήκος της τροχιάς που διανύει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα ίσο με 1/299,792,458 του δευτερολέπτου (Thompson and Taylor 2008, 70th PBT Symposium 1986, Taylor 1991, Barrow 1991). Είναι σαφές πως ο ορισμός αυτός βασίζεται στην (Ειδική και Γενική) Θεωρία της Σχετικότητας (Einstein 2000, ‘t Hooft 2001, Ridler 2001, Dirac 1996, Wald 1984, Weinberg 1972). Βασικό συστατικό της Θεωρίας Σχετικότητας από φυσικής πλευράς είναι το ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια για κάθε αδρανειακό παρατηρητή (όπως προκύπτει από πλήθος πειραμάτων, αρχής γενομένης από το περίφημο πείραμα Michelson-Morley στα τέλη του 19^{ου} αιώνα). Στην πραγματικότητα η θεμελιώδης διαφορά της αρχής σχετικότητας του Einstein από την αρχή σχετικότητας του Γαλιλαίου είναι η εναλλαγή του αναλλοίωτου της ταυτοχρονίας με το αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός.

Τα μαθηματικά στα οποία εδράζεται η Θεωρία της Σχετικότητας είναι η (ψευδο-) Ρημάνια Γεωμετρία (do Carmo 1992, Petersen 2006, Jost 2008). Το αντικείμενο μελέτης της Ρημάνιας γεωμετρίας είναι η Ρημάνια πολλαπλότητα: Μια Ρημάνια πολλαπλότητα (ή Ρημάνιος χώρος) είναι ένα ζεύγος (M,g) όπου M είναι μια πραγματική λεία πολλαπλότητα της οποίας κάθε εφαπτόμενος χώρος είναι εφοδιασμένος με μια Ρημάνια μετρική g, δηλαδή μια συμμετρική διγραμμική μορφή (εσωτερικό γινόμενο) που μεταβάλλεται με λείο τρόπο από σημείο σε σημείο της πολλαπλότητας. Αν η g δεν είναι κατ’ ανάγκη θετικά ορισμένη έχουμε μια ψευδορημάνια μετρική.

Η μετρική μας δίδει την δυνατότητα να μετράμε μήκη, γωνίες, εμβαδά, όγκους, και να υπολογίζουμε καμπυλότητες, βαθμίδες βαθμωτών συναρτήσεων, αποκλίσεις διανυσματικών πεδίων κλπ. Ο χωρόχρονος που ζούμε αποτελεί ένα παράδειγμα μιας ψευδορημάνιας πολλαπλότητα διάστασης 4. Επειδή εξ ορισμού μια πολλαπλότητα τοπικά μοιάζει σαν τον χώρο $\mathbb{R}^n$ και επειδή (τουλάχιστον μακροσκοπικά) η διάσταση του χωρόχρονου είναι 4, τοπικά ο χωρόχρονος μοιάζει (τοπολογικά) με τον χώρο $\mathbb{R}^4$. Μια βασική (γεωμετρική) διαφορά της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ για συντομία) από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ για συντομία) είναι πως στην πρώτη ο χωρόχρονος είναι επίπεδος, δηλαδή τοπικά αλλά και ολικά μοντελοποιείται πάνω στο χώρο $\mathbb{R}^4$ ενώ στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ο χωρόχρονος αποτελεί ψευδορημάνια πολλαπλότητα με μη μηδενική καμπυλότητα οπότε μόνο τοπικά μοντελοποιείται πάνω στο χώρο $\mathbb{R}^4$. Η τοπική συμπεριφορά και στις δύο περιπτώσεις πάντως είναι ίδια.

Τα τελευταία 20 χρόνια όμως έχει επισυμβεί μια μεγάλη πρόοδο στην γεωμετρία, πιο συγκεκριμένα έχει ανακαλυφθεί η λεγόμενη μη-μεταθετική γεωμετρία (Connes 1994, Connes and Marcolli 2007) η οποία γενικεύει σε μεγάλο βαθμό τη Ρημάνια γεωμετρία (η οποία σημειωτέον είναι και σχεδόν 200 ετών). Σκοπός αυτού του άρθρου είναι να θέσει τις μαθηματικές (γεωμετρικές) βάσεις για την εφαρμογή αυτής της γεωμετρίας στη μετρολογία και στη μέτρηση των θεμελιωδών μεγεθών. Ευελπιστούμε το άρθρο αυτό να αποτελέσει την αρχή μιας σειράς άρθρων για την εφαρμογή αυτής της νέας γεωμετρίας στη μετρολογία.

2. Η γεωμετρία πίσω από τον παρόντα ορισμό του μέτρου

2.1 Η γεωμετρία Minkowski

Στην ΕΘΣ ο χωρόχρονος μοντελοποιείται πάνω στον διανυσματικό χώρο (αλλά και πολλαπλότητα) $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με την λεγόμενη (ψευδο)μετρική Minkowski. Αυτή είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή θετικά ημιορισμένη. Το γεγονός πως απαιτείται η μετρική Minkowski και όχι η γνωστή Ευκλείδεια μετρική στις 4 διαστάσεις μπορεί κανείς να το δει και από την εξίσωση κύματος που ικανοποιεί λχ το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο κενό

$$\Box A_\mu = 0, \qquad (1a)$$

όπου $\Box$ ο γνωστός τελεστής d'Alembert:

$$\Box = (1/c^2)\partial_t^2 - \nabla^2 \qquad (1b)$$

και A_μ το τετραδυναμικό. Ο τελεστής d'Alembert δεν είναι παρά ο τελεστής Laplace στον $\mathbb{R}^4$ εάν χρησιμοποιήσουμε την μετρική Minkowski. Είναι γνωστό ότι ένα βασικό κίνητρο για την ανακάλυψη της ΕΘΣ ήταν το γεγονός ότι οι εξισώσεις του Maxwell δεν υπακούουν στην παλιά αρχή σχετικότητας του Γαλιλαίου.

Επιλέγοντας μια βάση οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές μπορούν να αναπαρασταθούν με συμμετρικούς πίνακες, στην περίπτωσή μας με έναν πίνακα 4 Χ 4. Εάν επιλέξουμε μια η-Καρτεσιανή βάση (ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων όπως λέμε στη φυσική), η μετρική Minkowski (για να ακριβολογούμε η ομότιμη κλάση της μετρικής Minkowski) μπορεί να αναπαρασταθεί στην κανονική της μορφή με τον πίνακα

$$\eta = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1) \qquad (2)$$

όπου υιοθετούμε την υπογραφή (+ - - -) για να περιγράψουμε την ομότιμη κλάση της μετρικής Minkowski (είθισται η μετρική Minkowski που αποτελεί ένα παράδειγμα μιας ψευδορημάνιας μετρικής να συμβολίζεται στην διεθνή βιβλιογραφία με το ελληνικό μικρό γράμμα η). Άρα το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων με συντεταγμένες $X = (X^0,X^1,X^2,X^3)$ και $Y = (Y^0,Y^1,Y^2,Y^3)$ θα δίδεται από την έκφραση

$$\eta\,(X,Y) = X^0Y^0 - X^1Y^1 - X^2Y^2 - X^3Y^3. \qquad (3)$$

Δοθείσης μιας μετρικής είναι σαφές πως μπορούμε να ορίσουμε μήκη, το μήκος (μέτρο) ενός διανύσματος (επειδή αυτά αποτελούν στοιχεία του χώρου $\mathbb{R}^4$ στην φυσική αποκαλούνται τετρανύσματα) $X = (X^0,X^1,X^2,X^3)$ θα είναι ίσο με

$$|X| = \eta\,(X,X) = X^0X^0 - X^1X^1 - X^2X^2 - X^3X^3 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 \quad (4)$$

Άμεσα μπορούμε να ορίσουμε και γωνίες, για παράδειγμα το συνημίτονο της γωνίας έστω θ, μεταξύ των διανυσμάτων X και Y θα δίδεται από τη σχέση

$$\cos\theta = \eta\,(X,Y) / (|X||Y|). \qquad (5)$$

Στην φυσική ισοδύναμα χρησιμοποιείται το στοιχειώδες μήκος (ιδιόχρονος)

$$d\tau^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (6)$$

Επειδή η μετρική Minkowski δεν είναι θετικά ορισμένη είναι προφανές πως οι εκφράσεις (3), (4) και (6) μπορεί να παίρνουν θετικές, αρνητικές αλλά και μηδενικές τιμές. Στην φυσική μιλάμε αντίστοιχα για χρονικά, χωρικά και μηδενικά τετρανύσματα. Για λόγους που δεν είναι της παρούσης, στην ΕΘΣ δεχόμαστε πως φυσικό νόημα έχουν μόνο τα χρονικά τετρανύσματα ενώ τα τετρανύσματα που περιγράφουν τα φωτόνια είναι μηδενικά. Συνεπώς ένα θελήσουμε να περιγράψουμε την τροχιά (διάνυσμα θέσης) ενός φωτονίου η σχέση (6) θα δώσει

$$0 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

οπότε

$$(cdt)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

οπότε

$$(cdt)^2 = ds^2 \quad (7)$$

Η σχέση (7) δίδει τον ορισμό του μέτρου στο σύστημα SI.

2.2 Η γεωμετρία Ρήμαν

Στην περίπτωση της Ρημάνιας γεωμετρίας τα πράγματα γενικεύονται ως εξής: Αντί του χώρου $\mathbb{R}^4$ θα έχουμε μια λεία πραγματική πολλαπλότητα, υπενθυμίζουμε τον ορισμό: Μια πραγματική λεία πολλαπλότητα διάστασης (γενικά) n είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff τοπικά ομοιομορφικός με τον χώρο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή για κάθε σημείο της πολλαπλότητας υπάρχει μια γειτονιά (ανοικτό σύνολο που το περιέχει) που είναι ομοιομορφική με μια ανοικτή μπάλα διάστασης n (ομοιομορφική σημαίνει πως υπάρχει απεικόνιση 1-1, επί, συνεχής και με συνεχή αντίστροφη). Οι απεικονίσεις αυτές που τοπικά μοντελοποιούν την πολλαπλότητα πάνω στον χώρο $\mathbb{R}^n$ λέγονται χάρτες συντεταγμένων. Είναι σαφές πως οι χάρτες συντεταγμένων μπορεί να τέμνονται και ένα σημείο της πολλαπλότητας μπορεί να αναπαρίσταται σε διαφορετικούς χάρτες. Στις λείες πολλαπλότητες απαιτούμε αυτές οι απεικονίσεις που αναπαριστούν τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων μεταξύ επικαλύψεων των χαρτών να είναι λείες (σκεφτείτε πως οι απεικονίσεις αυτές είναι από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ οπότε η έννοια «λείος» έχει το γνωστό νόημα που γνωρίζουμε από την διανυσματική ανάλυση, δηλαδή σημαίνει άπειρα διαφορίσιμος). Ο ορισμός αυτός μας δίδει την δυνατότητα να κάνουμε διανυσματική ανάλυση πάνω στις πολλαπλότητες που αποτελούν μια σημαντική γενίκευση των χώρων $\mathbb{R}^n$. Παράδειγμα πραγματικής λείας πολλαπλότητας διάστασης 2 είναι η σφαίρα S^2.

Η συνθήκη ότι θέλουμε η πολλαπλότητα να είναι λεία εγγυάται την ύπαρξη του λεγόμενου εφαπτόμενου χώρου σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας (αυτό αποτελεί γενίκευση σε μεγαλύτερες διαστάσεις της εφαπτομένης μιας λείας καμπύλης). Το εφαπτόμενο επίπεδο δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας χώρος $\mathbb{R}^n$. Η Ρημάνια μετρική συνεπώς είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή στον εφαπτόμενο χώρο (που όμως απαιτούμε να μεταβάλλεται με λείο τρόπο από σημείο σε σημείο) και όσα είπαμε προηγουμένως για τον χώρο $\mathbb{R}^4$ γενικεύονται άμεσα και στην περίπτωσή μας. Συνεπώς μια Ρημάνια πολλαπλότητα είναι ένα ζεύγος (M,g) όπου M λεία πραγματική πολλαπλότητα και g μια Ρημάνια μετρική. Είναι σαφές πως στην ΕΘΣ η πολλαπλότητα (χωρόχρονος) ταυτίζεται με τον εφαπτόμενο χώρο ενώ στην ΓΘΣ αυτό δεν συμβαίνει κατ' ανάγκη (παράβαλε το $\mathbb{R}^2$ με τη σφαίρα S^2, το $\mathbb{R}^2$ αποτελεί το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της σφαίρας).

Στην Ρημάνια γεωμετρία, εάν επιλέξουμε μια βάση (ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων), η μετρική σε κάθε σημείο απεικονίζεται με ένα συμμετρικό πίνακα n X n αλλά τα στοιχεία του πίνακα αυτού δεν είναι αριθμοί αλλά συναρτήσεις (καθότι η μετρική μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο). Για να είμαστε πιο ακριβείς, σύμφωνα με την τανυστική ανάλυση η μετρική αποτελεί έναν συναλλοίωτο τανυστή τάξης 2. Το στοιχειώδες μήκος σε μια Ρημάνια πολλαπλότητα (M,g) διάστασης n επιλέγοντας τοπικές συντεταγμένες x^μ (όπου $\mu = 1,2,\ldots,n$) θα δίδεται από την έκφραση

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \quad (8)$$

υιοθετώντας την γνωστή σύμβαση Einstein (επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται). Αποτελεί βασική φυσική αρχή ότι η ΓΘΣ τοπικά ανάγεται στην ΕΘΣ (το γεγονός αυτό καθιστά την έννοια της πολλαπλότητας ως κατάλληλη για να περιγράψει τον χωρόχρονο σε μεγάλη κλίμακα). Αναφέρουμε επίσης ότι το φως (τα φωτόνια) σύμφωνα με την ΓΘΣ ακολουθεί γεωδαισιακή τροχιά, στην γεωμετρία Ρήμαν οι γεωδαισιακές καμπύλες είναι το αντίστοιχο της ευθείας στην Ευκλείδεια γεωμετρία, είναι οι καμπύλες με ελάχιστο –για την ακρίβεια ακρότατο- μήκος. Η γεωδαισιακή απόσταση d(P,Q) δύο σημείων P, Q μιας πολλαπλότητας Ρήμαν δίδεται από το μήκος της γεωδαισιακής τροχιάς που ενώνει τα σημεία P, Q μέσω της σχέσης (8). Ουσιαστικά είναι το infimum του μήκους των τροχιών που συνδέουν τα σημεία P,Q όπου το μήκος της κάθε τροχιάς υπολογίζεται μέσω της σχέσης (8).

3. Η μη-μεταθετική Γεωμετρία

Η μη-μεταθετική γεωμετρία αποτελεί την σημαντικότερη εξέλιξη της γεωμετρίας κατά τα τελευταία 20 χρόνια. Πατέρας της θεωρείται ο κορυφαίος διεθνώς γάλλος μαθηματικός Alain Connes αλλά σημαντικές συνεισφορές υπάρχουν από τους Daniel Quillen, J. Cuntz, κλπ.

Η απαρχή της μη-μεταθετικής γεωμετρίας είναι το λεγόμενο θεώρημα Gelfand που λέγει το εξής: Θεωρούμε την κατηγορία με αντικείμενα τους συμπαγείς τοπολογικούς χώρους Hausdorff και μορφισμούς τους ομοιομορφισμούς μεταξύ αυτών. Στη συνέχεια θεωρούμε την κατηγορία με αντικείμενα τις μεταθετικές C*-άλγεβρες με μονάδα και μορφισμούς τους ομομορφισμούς που διατηρούν τον αστερίσκο. Οι κατηγορίες αυτές είναι ισοδύναμες και οι ισοδυναμίες δίδονται από τον συναρτητή C(-) που σε κάθε συμπαγή τοπολογικό χώρο Hausdorff X αντιστοιχεί την μεταθετική C*-άλγεβρα C(X) των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων του X και από τον συναρτητή Spec(-) που σε κάθε μεταθετική C*-άλγεβρα A αντιστοιχεί τον συμπαγή τοπολογικό χώρο Hausdorff Spec(A) (το λεγόμενο φάσμα της άλγεβρας A, στοιχεία του φάσματος αποτελούν οι χαρακτήρες της άλγεβρας, δηλαδή μη-μηδενικοί ομομορφισμοί από την A στο σώμα των μιγαδικών που διατηρούν τον αστερίσκο). Οι συναρτητές αυτοί ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$\mathrm{Spec} \circ C = 1$$

και

$$C \circ \mathrm{Spec} = 1,$$

δηλαδή C(Spec (A))=A και Spec (C(X)) = X, όπου 1 ο ταυτοτικός συναρτητής και "$\circ$" η σύνθεση συναρτητών. Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν είναι συμπαγής αλλά μόνο τοπικά συμπαγής τότε η άλγεβρα δεν θα έχει μοναδιαίο (μια δυσκολία που μπορεί να υπερκερασθεί αλλά αυξάνει την πολυπλοκότητα).

Το θεώρημα Gelfand υποδηλώνει ότι τα τοπολογικά δεδομένα ενός χώρου εμπεριέχονται στην άλγεβρα των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων και μπορεί η τοπολογία να ανακαλυφθεί από την άλγεβρα αυτή. Στην περίπτωση μιας Ρημάνιας πολλαπλότητας συνεπώς, οι τοπολογικές πληροφορίες μπορούν να ανακαλυφθούν από την άλγεβρα των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων. Τι γίνεται όμως με την Ρημάνια μετρική, δηλαδή τα δεδομένα που μας δίδουν την δυνατότητα να μετράμε μήκη και αποστάσεις? Αυτό μπορεί επίσης να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την έννοια του (περιττού) K-κύκλου (Quillen et all 1990, παραθέτουμε τον ορισμό και μετά ακολουθούν διευκρινήσεις):

Ένας (περιττός) K-κύκλος (μη-φραγμένο πρότυπο Fredholm) σε μια άλγεβρα A δίδεται από την τετράδα (A, π, H, D) όπου A μια άλγεβρα (μεταθετική ή όχι), H ένας (διαχωρίσιμος) χώρος Hilbert, π μια μοναδιακή αναπαράσταση της A στον χώρο Hilbert H και D ένας μη-φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής που δρα επίσης στον χώρο Hilbert H που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Ο μεταθέτης $[D,a] = Da - aD$ (όπου a στοιχείο της άλγεβρας A) είναι φραγμένος τελεστής για κάθε στοιχείο a της άλγεβρας A.
2. Ο τελεστής $(1+D^2)^{-1}$ είναι συμπαγής.
(Εάν η άλγεβρα A δεν έχει μοναδιαίο τότε τροποποιούμε ελαφρώς την συνθήκη 2 απαιτώντας ο τελεστής $[a(1+D^2)]^{-1}$ να είναι συμπαγής για κάθε στοιχείο a της άλγεβρας A).

Ο τρόπος με τον οποίο η μετρική μπορεί να αποκαλυφθεί από τα δεδομένα ενός (περιττού) K-κύκλου αποτελεί την βασική ιδέα αυτού του άρθρου και θα παρουσιασθεί με τη μορφή ενός Λήμματος στο μεθεπόμενο κεφάλαιο (κεφάλαιο 5) του παρόντος άρθρου.

Οι K-κύκλοι αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία της K-Ομολογίας (Zois 2010, Karoubi 1987). Η θεωρία αυτή αποτελεί την δυϊκή θεωρία της (τοπολογικής) K-Θεωρίας των Atiyah και Grothendieck (Atiyah 1989, Friedlander et all 2005, Grothendieck 1971) που αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην τοπολογία και την γεωμετρία σήμερα (αλλά και στην θεωρητική φυσική, θεωρία υπερχορδών, θεωρία μεμβρανών, M-Θεωρία κλπ).

4. Ο τελεστής Dirac

Κομβικό ρόλο στα παρακάτω θα παίξει ο τελεστής Dirac και για τον λόγο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση. Ως γνωστόν τα σωμάτια στην φύση χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα φερμιόνια και τα μποζόνια. Τα πρώτα έχουν ημιακέραιο σπιν και υπακούουν στην λεγόμενη απαγορευτική αρχή του Pauli και στην στατιστική Dirac-Fermi ενώ τα δεύτερα έχουν ακέραιο σπιν και υπακούουν στην λεγόμενη στατιστική Bose-Einstein σύμφωνα με το spin statistics theorem (Streater et all 2000, δεν μας ενδιαφέρουν εδώ θέματα όπως anyons, braid statistics κλπ). Τα μποζόνια περιγράφονται από την εξίσωση Klein-Gordon (μια διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης υπερβολικού τύπου) που αποτελεί την σχετικιστική έκφραση της εξίσωσης Schrödinger της κβαντομηχανικής (ουσιαστικά πρόκειται για τον τελεστή Laplace στον χωρόχρονο Minkowski 4 διαστάσεων με υπογραφή (+ - - -) όπως παραπάνω στο κεφάλαιο 2)

$$(\Box + \mu^2)\Psi = [(1/c^2)\partial_t^2 - \nabla^2 + \mu^2]\,\Psi = 0 \qquad (9)$$

όπου ∇^2 ο γνωστός τελεστής Laplace στις 3 χωρικές διαστάσεις και $\mu = mc/\hbar$ (m η μάζα ηρεμίας, c η ταχύτητα του φωτός και $\hbar = h / 2\pi$, h η σταθερά του Planck). Τα φερμιόνια στον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski 4 διαστάσεων περιγράφονται από την εξίσωση Dirac (γράφουμε την εξίσωση στην αυθεντική γραφή του Dirac):

$$(\beta mc^2 + \sum a_k P_k c)\,\Psi = i\hbar\,\partial_t\Psi \qquad (10)$$

όπου ο δείκτης k παίρνει τις τιμές 1,2,3 (οι τρεις χωρικές συντεταγμένες), m η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου, c η ταχύτητα του φωτός και P η ορμή με την κβαντομηχανική έννοια, δηλαδή η k συνιστώσα της κλασικής ορμής P_k αντιστοιχεί στον τελεστή της μερικής παραγώγου ως προς την αντίστοιχη συντεταγμένη, δηλαδή

$$P_k \leftrightarrow -ih\partial_k.$$

Οι "μυστήριες" ποσότητες ήταν οι 4 ποσότητες β και a_k που αποτελούν μιγαδικούς πίνακες 4X4 και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(a_k)^2 = \beta^2 = I_4 \qquad (11)$$

όπου I_4 ο μοναδιαίος 4X4 πίνακας και

$$a_i a_j + a_j a_i = 0 = a_i\beta + \beta a_i \qquad (12)$$

(όλοι οι δείκτες i,j,k παίρνουν τις τιμές 1,2,3). Σε συναλλοίωτη σχετικιστική μορφή η εξίσωση Dirac παίρνει τη μορφή (Dirac 1928, Dirac 1982, Peskin et all 1995, Itzykson et all 2006, Weinberg 1995)

$$[(-ih/2\pi)\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + mc]\ \Psi = 0 \qquad (13)$$

όπου $\mu = 0,1,2,3$ και γ^{μ} οι περίφημοι πια πίνακες του Dirac (μιγαδικοί 4X4 πίνακες) που αποτελούν μια βάση της άλγεβρας Clifford (άλγεβρα Dirac) και ικανοποιούν την σχέση

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = 2\ \eta^{\mu\nu} \qquad (14)$$

όπου το σύμβολο {,} συμβολίζει αντιμεταθέτη (δηλαδή $\{\alpha,\beta\}=\alpha\beta + \beta\alpha$) και $\eta^{\mu\nu}$ η ανταλλοίωτη μετρική Minkowski που είδαμε στο κεφάλαιο 2. Ισχύει η σχέση

$$\eta_{\mu\kappa}\ \eta^{\kappa\nu} = \delta_{\mu}^{\ \nu} \qquad (15)$$

όπου $\delta_{\mu}^{\ \nu}$ το γνωστό δ του Kronecker.

Πιο συγκεκριμένα για να κάνουμε σύνδεση με την αυθεντική γραφή του Dirac, ισχύει ότι $\beta = \gamma^0$ και $\gamma^k = \gamma^0\ a^k$ (οι δείκτες ανεβοκατεβαίνουν με την μετρική) και οι πίνακες είναι οι εξής:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\chi} \\ -\sigma_{\chi} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \text{ και } \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix},$$

όπου I_2 ο μοναδιαίος 2X2 πίνακας και σ_{χ}, σ_y, σ_z οι μιγαδικοί 2X2 πίνακες του Pauli.

Η ποσότητα $\gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ λέγεται *τελεστής Dirac*. Η εξίσωση Dirac έδωσε μια ακριβή περιγραφή του ηλεκτρονίου (σχετικιστικό σωμάτιο με σπιν ½) ερμηνεύοντας με ακρίβεια το φάσμα εκπομπής του υδρογόνου (ειδικότερα την υπέρλεπτη υφή) και ταυτόχρονα προέβλεψε την ύπαρξη της αντιύλης. Από μαθηματικής πλευράς η εξίσωση Dirac ερμηνεύεται και ως μια εξίσωση ιδιοτιμών όπου η μάζα ηρεμίας είναι ανάλογη με την ιδιοτιμή του τελεστή της τετραορμής. Σημειώνουμε εδώ πως όλα τα μαζικά στοιχειώδη σωμάτια (δηλαδή τα στοιχειώδη σωμάτια που δίδουν μάζα) που γνωρίζουμε σήμερα στη φυσική (αυτά είναι τα κουάρκ, τα λεπτόνια και τα νετρίνα) είναι φερμιόνια. Η μαθηματική ερμηνεία είναι ότι ο τελεστής Dirac αποτελεί την τετραγωνική ρίζα της Λαπλασιανής.

Στην περίπτωση μιας τυχαίας πολλαπλότητας Ρήμαν η παραπάνω κατασκευή του Dirac γενικεύτηκε από τους Atiyah – Patodi – Saphiro - Singer (βλ Lawson et all 1989, Friedrich 2000, Atiyah 2005) ως εξής: Δοθείσης μιας Ρημάνιας πολλαπλότητας M έστω διάστασης n, η μετρική Ρήμαν μειώνει την ομάδα δομής της εφαπτόμενης δέσμης TM της M, από την ομάδα GL(n) στην ειδική ορθογώνια ομάδα SO(n) (αυτό με απλά λόγια αποτελεί έκφραση του γεγονότος ότι δοθείσης μιας μετρικής μπορούμε να ορίσουμε μήκη και γωνίες οπότε έχουμε μια έννοια καθετότητας και άρα ορίζουμε ορθοκανονικές βάσεις, δηλαδή βάσεις με μέτρο 1 που τα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα). Στη συνέχεια ορίζουμε την σπινοριακή δέσμη S πάνω από την M που ουσιαστικά είναι μια 2:1 ανόρθωση της δέσμης των ορθοκανονικών πλαισίων. Η σπινοριακή δέσμη S αποτελεί μια πρωτεύουσα δέσμη με ομάδα δομής την ομάδα Lie Spin(n) που αποτελεί την διπλή κάλυψη της ομάδας SO(n). Εάν η παραπάνω κατασκευή είναι δυνατή, τότε λέμε ότι η M αποτελεί σπιν πολλαπλότητα. Μια πολλαπλότητα αποτελεί σπιν πολλαπλότητα εάν η δεύτερη Stiefel-Whitney class της εφαπτόμενης δέσμης αυτής μηδενίζεται. Η πολλαπλότητα M είναι προσανατολίσιμη εάν μηδενίζεται η πρώτη Stiefel-Whitney class της εφαπτόμενης δέσμης αυτής.

Πιο συγκεκριμένα, έστω (V,Q) ένας διανυσματικός χώρος (επί ενός μεταθετικού σώματος k) εφοδιασμένος με μια τετραγωνική μορφή Q. Η άλγεβρα Clifford Cl(V,Q) είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα που ορίζεται ως το πηλίκο της ελεύθερης τανυστικής άλγεβρας $FT(V) = \sum \otimes^r V$ με το ιδεώδες $I(V)$ της $FT(V)$ που γεννάται από τα στοιχεία της μορφής $v \otimes v + Q(v)1$ όπου v στοιχείο του V και $\otimes$ το τανυστικό γινόμενο, δηλαδή:

$$Cl(V,Q) = \sum \otimes^r V / I(V) \quad (16).$$

Υπενθυμίζουμε από την θεωρία των ομάδων Lie ότι για $n \geq 3$ υπάρχει ο παγκόσμιος καλύπτων ομομορφισμός $\xi_0 : Spin(n) \rightarrow SO(n)$ με πυρήνα $\{1,-1\}$ (αυτό σημαίνει η φράση ότι η ομάδα $Spin(n)$ αποτελεί την διπλή κάλυψη της ομάδας $SO(n)$). Έστω ότι $n \geq 3$ και E μια προσανατολίσιμη διανυσματική δέσμη Ρήμαν διάστασης n πάνω από μια πολλαπλότητα M. Μια δομή σπιν στην διανυσματική δέσμη E είναι μια πρωτεύουσα νηματική δέσμη $P(Spin(n)),E)$ με ομάδα δομής της ομάδα Lie $Spin(n)$ μαζί με μια διπλή κάλυψη

$$\xi: \quad P(Spin(n)),E) \rightarrow P(SO(n),E) \quad (17)$$

όπου $P(SO(n),E)$ η δέσμη των προσανατολισμένων ορθοκανονικών πλαισίων της διανυσματικής δέσμης E που ικανοποιεί τη σχέση $\xi(pg) = \xi(p)\xi_0(g)$ για κάθε p στοιχείο της $P(Spin(n)),E)$ και g στοιχείο της ομάδας $Spin(n)$.

Μια σπιν πολλαπλότητα είναι μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα Ρήμαν M με μια σπιν δομή στην εφαπτόμενη δέσμη TM της M (η διάσταση της εφαπτόμενης δέσμης ταυτίζεται με την διάσταση της πολλαπλότητας).

Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ επάγει έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό της άλγεβρας Clifford $Cl(\mathbb{R}^n)$ που απεικονίζει την τανυστική άλγεβρα στον εαυτό της και διατηρεί το ιδεώδες. Αυτή η επαγώμενη απεικόνιση στην άλγεβρα Clifford αποτελεί ομομορφισμό (διατηρεί τον πολλαπλασιαμό) και συνεπώς αποκτάμε μια αναπαράσταση

$$cl(\rho(n)): SO(n) \rightarrow Aut\,(Cl(\mathbb{R}^n)) \quad (18).$$

Εάν τώρα E είναι μια προσανατολισμένη διανυσματική δέσμη Ρήμαν πάνω από μια πολλαπλότητα M, τότε η δέσμη Clifford $Cl(E)$ της προσανατολισμένης διανυσματικής δέσμης Ρήμαν E είναι η δέσμη $Cl(E) = P(SO(n),E) \; X_{cl(\rho(n))} \; Cl(\mathbb{R}^n)$ όπου $cl(\rho(n)): SO(n) \rightarrow Aut\;(Cl(\mathbb{R}^n))$ η αναπαράσταση που προέρχεται από τους επαγώμενους μετασχηματισμούς στην ορθογώνιους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$. Η E είναι μια δέσμη διανυσματικών χώρων εφοδιασμένων με εσωτερικό γινόμενο και η $Cl(E)$ είναι η σχετιζόμενη δέσμη των αλγεβρών Clifford. Στην πραγματικότητα η $Cl(E)$ θα μπορούσε να ορισθεί ως η δέσμη πηλίκο της ελεύθερης τανυστικής δέσμης $\sum \otimes^r E$ της E από τη δέσμη των ιδεωδών $I(E)$, δηλαδή η $I(E)$ είναι η δέσμη πάνω από την M της οποίας οι ίνες είναι τα δίπλευρα ιδεώδη της ελεύθερης τανυστικής άλγεβρας της ίνας της E που γεννώνται από τα στοιχεία $v \otimes v + \|v\|^2$ όπου v στοιχείο της ίνας της E. Συνεπώς θα έχουμε (κατ΄ αναλογία με την σχέση (16) που αφορά διανυσματικούς χώρους) ότι

$$Cl(E) = \sum \otimes^r E / I(E).$$

Είναι προφανές ότι η $Cl(E)$ αποτελεί δέσμη αλγεβρών Clifford πάνω από την M και ο κατά ίνες πολαπλασιαμός στην $Cl(E)$ δίδει δομή άλγεβρας στον χώρο των διατομών της $Cl(E)$.

Έστω M πολλαπλότητα Ρήμαν διάστασης n με δέσμη Clifford $Cl(M)$ (δηλαδή $Cl(M)$ είναι η δέσμη Clifford της εφαπτόμενης δέσμης της M, ήτοι $Cl(M) = Cl(TM)$) και έστω S τυχαία δέσμη αριστερών προτύπων πάνω από την $Cl(M)$ (δηλαδή μια δέσμη πάνω από την M της οποίας η ίνα S_x πάνω από το σημείο x της M αποτελεί αριστερό πρότυπο πάνω από την άλγεβρα $Cl(M)_x$). Υποθέτουμε ότι η S είναι Ρήμαν με μια συνοχή Ρήμαν (συνοχή με μηδενική στρέψη). Με τις υποθέσεις αυτές μπορούμε να ορίσουμε με κανονικό τρόπο έναν διαφορικό τελεστή πρώτης τάξης Đ που δρα στις διατομές της δέσμης S που λέγεται *τελεστής (τύπου) Dirac* ως εξής

$$Đσ = \sum e_j \cdot \nabla\ e_j σ \quad (19)$$

όπου τα $e_1,...,e_n$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση της T_xM, σ μια διατομή της S, ∇ η συναλλοίωτη παράγωγος στην S που ορίζεται από την συνοχή ενώ "·" συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό Clifford. Το τετράγωνο $Đ^2$ του τελεστή Dirac λέγεται *Λαπλασιανή Dirac.*

5. Το Βασικό Λήμμα

Η κεντρική ιδέα του άρθρου διατυπώνεται με το παρακάτω Λήμα:

Θεμελιώδες Λήμμα:

«Μπορούμε να ανακαλύψουμε την μετρική Ρήμαν από τον θεμελιώδη Κ-κύκλο που ορίζεται μέσω του τελεστή Dirac σε μια σπιν πολλαπλότητα Μ».

Απόδειξη: Αυτό γίνεται ως εξής: Έστω Μ σπιν πολλαπλότητα. Η «θεμελιώδης» Κ-ομολογική κλάση της Μ (ένας περιττός Κ-κύκλος, βλέπε ορισμό στο κεφάλαιο 3) ορίζεται ως εξής: Για άλγεβρα Α θεωρούμε την άλγεβρα C(M) των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στην Μ. Φανερά η C(M) αποτελεί διανυσματικό χώρο ενώ γίνεται άλγεβρα χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιασμό κατά σημείο:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad (20)$$

όπου τα f,g αποτελούν στοιχεία της C(M) και το x είναι κάποιο σημείο της Μ (σημειώστε ότι στο αριστερό μέλος της (12) έχουμε τον πολλαπλασιασμό στο C(M) ενώ στο δεξί μέλος έχουμε τον γνωστό πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών). Η C(M) στην πραγματικότητα αποτελεί μια μοναδιαία C*-άλγεβρα όπου το μοναδιαίο στοιχείο είναι η σταθερή συνάρτηση 1, ο αστερίσκος δεν είναι τίποτε άλλο από την γνωστή μιγαδική συζυγία ενώ η νόρμα ||.|| δίδεται από την σχέση

$$||f|| = \max |f(x)| \text{ για κάθε x σημείο της M.} \quad (21)$$

Εύκολα ελέγχει κανείς πως η C(M) είναι πλήρης ως προς την μετρική που επάγεται από την παραπάνω νόρμα.

Για χώρο Χίλμπερτ Η θεωρούμε τον χώρο $H = L^2 (M,S)$, δηλαδή τον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων διατομών της σπινοριακής δέσμης S πάνω από την πολλαπλότητα Μ. Για τελεστή D θεωρούμε τον τελεστή Dirac Đ της σπιν πολλαπλότητας Μ που αποτελεί τελεστή αυτοσυζυγή μη φραγμένο που δρα στον χώρο Χίλμπερτ Η. Η μοναδιακή αναπαράσταση π της C(M) στον Η δίδεται από την πολλαπλασιαστική δράση "·" της C(M) στον Η: Εάν f στοιχείο της C(M) και ξ στοιχείο του Η, τότε (f ξ)(x) = f(x) ξ(x). Εύκολα ελέγχονται οι ιδιότητες του ορισμού στο κεφάλαιο 3 οπότε η τετράδα (C(M), L^2 (M,S), · , Đ) αποτελεί έναν περιττό Κ-κύκλο (περιττή κλάση στην Κ-ομολογία της Μ, ή ισοδύναμα ένα στοιχείο της $1^{ης}$ Κ-ομολογικής ομάδας $K_1(M)$ της Μ).

Η μετρική Ρήμαν στην Μ μπορεί να ανακαλυφθεί ως εξής: Εάν x,y δύο σημεία της Μ, τότε από το Θεώρημα Gelfand τα σημεία αυτά αντιστοιχούν μονοσήμαντα σε δύο χαρακτήρες χ_x και χ_y (δηλαδή τα χ_x και χ_y αποτελούν στοιχεία του φάσματος Spec(C(M)) της C(M)) που ορίζονται ως εξής: $\chi_x(f) = f(x)$ και $\chi_y(f) = f(y)$ για κάθε f στοιχείο της άλγεβρας C(M). Τότε η γεωδαισιακή απόσταση d(x,y) μεταξύ των σημείων x,y της Μ για την μετρική Ρήμαν της Μ δίδεται από την σχέση

$$d(x,y) = \sup \{ \,|\chi_x(f) - \chi_y(f)|\, ; f \in C(M), ||[Đ,f]|| \leq 1 \} \qquad (22)$$

όπου η νόρμα $||[Đ,f]||$ είναι η γνωστή νόρμα τελεστών στον χώρο Χίλμπερτ Η, δηλαδή $||[Đ,f]|| = \min \{k \geq 0 : ||[Đ,f]\, v|| \leq k\, ||v||$ για κάθε v στοιχείο του H$\}$.

Γενικά η φασματική ακτίνα ενός τελεστή είναι άνω φραγμένη από την νόρμα του τελεστή και εάν ο τελεστής είναι κανονικός τότε η νόρμα του τελεστή δίδεται από την φασματική ακτίνα. Υπενθυμίζουμε ότι η φασματική ακτίνα ενός τελεστή δίδεται από το supremum (ελάχιστο άνω φράγμα) των απόλυτων τιμών των ιδιοτιμών αυτού.

□

Το παραπάνω Λήμμα αποδεικνύει ότι δεν χάνεται καμία πληροφορία αν αντικαταστήσουμε τα τοπικά γεωμετρικά δεδομένα της μετρικής Ρήμαν από τα δεδομένα της θεωρίας τελεστών ενός μη-φραγμένου προτύπου Fredholm (K-κύκλου).

6. Σχόλια

Το παραπάνω θεμελιώδες Λήμμα δίδει την δυνατότητα να υπολογίζονται μήκη χρησιμοποιώντας αλγεβρικά δεδομένα και πιο συγκεκριμένα τον τελεστή Dirac. Ουσιαστικά αποδείξαμε ότι $ds = Đ^{-1}$, δηλαδή τα μήκη μετρώνται από τον διαδότη Dirac. Στην σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίων ο διαδότης αποτελεί την συνάρτηση Green του αντίστοιχου «κυματικού» τελεστή ενός σωματίου και σύμφωνα με την προσέγγιση Feynman των τροχιακών ολοκληρωμάτων σχετίζεται άμεσα με την πιθανότητα μετάβασης. Τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι τα εξής: Αποτελεί φορμαλισμό που είναι γενικά συναλλοίωτος οπότε μελλοντικά μπορεί να χρησιμεύσει και για τον προσδιορισμό μονάδων χρόνου εκτός από χώρου. Η ΓΘΣ αποτελεί γενικά συναλλοίωτη θεωρία αλλά αυτό δεν συμβαίνει (προς το παρόν) με την κβαντική θεωρία πεδίων (από τη στιγμή που δεν υπάρχει κβαντική θεωρία βαρύτητας, εξ'αιτίας του βέλους του χρόνου, του τρίτου θερμοδυναμικού αξιώματος κλπ υπάρχει σαφής διαχωρισμός χρόνου και χώρου στην κβαντική θεωρία πεδίων επί του παρόντος). Επίσης ο φορμαλισμός αυτός είναι πολύ γενικός, εφαρμόζεται τόσο σε πολλαπλότητες με μη-μηδενική καμπυλότητα αλλά και σε χώρους που δεν είναι απαραίτητα πολλαπλότητες (πλήρης εκμετάλλευση των δυνατοτήτων της μη-μεταθετικής γεωμετρίας, Zois 2000). Επίσης ο φορμαλισμός στηρίζεται στον τελεστή Dirac που περιγράφει όλα τα φερμιόνια, άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε φερμιόνιο για τον προσδιορισμό μηκών.

Βιβλιογραφία

Atiyah M.F., "K-Theory", 1989, Advanced Book Classics (2nd Edition), Addison Wesley.
Atiyah M.F., "Collected Works", Vol 1,2,3,4,5,6, 2005, Oxford University Press.
Barrow J.D., "Constants of Nature, Theories of Everything", 1991 Clarendon Press Oxford.
Connes A., "Noncommutative Geometry", 1994, Academic Press.
Connes A. and Marcolli M., "Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives", 2007 American Mathematical Society.
Dirac P.A.M., "General Theory of Relativity", 1996, Princeton.
Dirac P.A.M., "*The Quantum Theory of the Electron",* Proc. R. Soc. A117, No 778, p.p. 610-624, 1928, London UK.
Dirac P.A.M., "Principles of Quantum Mechanics", 1982, 4the Edition, Clarendon Press Oxford.
Do Carmo M.P., "Riemannian Geometry", 1992, Birkhauser, Boston.
Einstein A., "Relativity: The Special and General Theory", 2000, Bartleby N.York.
Friendlander E. and Grayson D., "Handbook of K-Theory", 2005 Springer.

Friedrich T., “Dirac Operators in Riemannian Geometry”, 2000, American Mathematical Society.
Grothendieck A., “Elements de Geometrie Algebrique”, (rediges avec la collaboration de J. Dieudonne), 1971 Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 166, 2nd Edition, Springer.
Itzykson C and Zuber J.-B., “Quantum Field Theory”, 2006, Dover.
Jost J., “Riemannian Geometry and Geometric Analysis”, 2008, Springer.
Karoubi M., “Homologie Cyclique et K-Theorie », 1987, Asterisque.
70th PBT Symposium, “Fundamental Constants in Physics and Metrology”, Metrologia 22.3, 1986.
Lawson H.B. and Michelsohn M.- L., “Spin Geometry”, 1989, Princeton.
Peskin M.E. and Schroeder M.V., “Quantum Field Theory”, 1995, Addison – Wesley.
Petersen P., “Riemannian Geometry”, 2006, Springer.
Quillen D.G., Segal G.B., Tsou S.T., “The Interface of Mathematics and Particle Physics”, 1990, Clarendon Press, Oxford.
Ridler W., “Relativity: Special, General and Cosmological”, 2001, Oxford University Press.
Streater R.F., Wightman A.S., “PCT, Spin - Statistics and all that”, 2000 Princeton University Press.
Taylor B.N., “Constants, Fundamental”, 1991 Encyclopaedia of Physics, 2nd Edition BCH Publishers.
Thompson A. and Taylor B.N., “Guide for the Use of the International System of Units (SI)”, NIST Special Publication 811, 2008 Edition.
‘t Hooft G., “Introduction to General Relativity”, 2001, Rinton N.Jersey.
Wald R.M., “General Relativity”, 1984, University of Chicago Press.
Weinberg S., “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”, 1972, Wiley.
Weinberg S., “The Quantum Theory of Fields”, 1995, Vol 1,2,3, Cambridge University Press.
Zois I.P., “18 Lectures on K-Theory”, 2010 CERN arXiv: 1008.1346.
Zois I.P., *“A new invariant for σ models”,* Commun. Math. Phys. Vol 209, p.p. 757 – 783, 2000, Springer.