ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑΣ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Δημήτριος Ρωσσικόπουλος
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών

Περίληψη

Στην ανάλυση των παρατηρήσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων είναι συνήθως πλήρους βαθμού. Σε μερικές περιπτώσεις όμως, όπως π.χ. η περίπτωση των συνθετικών παρατηρήσεων, περίπτωση που προκύπτει κατά την εφαρμογή ενός “διαχωρισμένου” αλγόριθμου όπου οι άγνωστες παράμετροι των αρχικών υπολογισμών αποτελούν τις παρατηρήσεις σε ένα επόμενο βήμα ανάλυσης, ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων μπορεί να προκύψει μη θετικά ορισμένος. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτείται η επιλογή ενός γενικευμένου αντίστροφου ως πίνακα βάρους των παρατηρήσεων έτσι ώστε η λύση των ελαχίστων τετραγώνων να ταυτίζεται με τη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται διάφορες επιλογές γενικευμένων αντίστροφων πινάκων για τον υπολογισμό του πίνακα βάρους και δίνεται σε κάθε περίπτωση η λύση ακόμη και όταν οι άγνωστες παράμετροι είναι μη εκτιμήσιμα μεγέθη. Έμφαση δίνεται στην εφαρμογή των στατιστικών μεθόδων για την αξιολόγηση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων, καθώς και στον έλεγχο συστηματικών και χονδροειδών σφαλμάτων.

Λέξεις-Κλειδιά: γενικευμένος αντίστροφος, έλεγχος υποθέσεων, εκτιμήσιμες και μη εκτιμήσιμες παράμετροι, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, πίνακας βάρους, πίνακας συμμεταβλητοτήτων.

Abstract.

In the adjustment of observations by the Least Squares Method the variance covariance matrix (of observations) is usually a positive definite matrix. In cases such as the derived observations, e.g. in the sequential approach (stepwise adjustment) for the assessment and interpretation of the geodetic data for the detection of possible spatial displacements and the estimation of deformation parameters, the covariance matrix may be singular. In this case the problem is the choice of a g-inverse matrix as a weight matrix that leads to the Best Linear Unbiased Estimation. Several attempts have been presented which finally end up in the Rao-Mitra approach of Unified Least Squares.

Key-words: generalized inverse, tests of hypothesis, estimable and non-estimable parameters, least square method, weight matrix, covariance matrix.

1. Εισαγωγή

Για τη συνόρθωση των παρατηρήσεων (ενός γεωδαιτικού δικτύου) με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων δημιουργούνται εξισώσεις που εκφράζουν κάθε παρατήρηση ως συνάρτηση επιλεγμένων αγνώστων παραμέτρων (των συντεταγμένων των κορυφών του δικτύου, οι οποίες αναφέρονται σε κάποιο σύστημα αναφοράς). Το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων σε μορφή πινάκων γράφεται

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{v} \tag{1}$$

όπου $\mathbf{b} = \mathbf{y}^b - \mathbf{y}^o$ είναι το n × 1 διάνυσμα των ανηγμένων παρατηρήσεων, **A** είναι ο n × m πίνακας των συντελεστών των αγνώστων παραμέτρων **x** και **v** τα σφάλματα των παρατηρήσεων. Οι σχέσεις

Δημήτριος Ρωσσικόπουλος, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Α.Π.Θ.
Προβλήματα Απροσδιοριστίας στη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων.

4º Τακτικό Εθνικό Συνέδριο Μετρολογίας
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου
Αθήνα, 3-4 Φεβρουαρίου 2012

$$E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$$
$$E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C} = \sigma^2\ \mathbf{Q} \qquad (2)$$

περιγράφουν το στοχαστικό μοντέλο των παρατηρήσεων, όπου σ^2 είναι η άγνωστη μεταβλητότητα αναφοράς και $\mathbf{Q}$ είναι ο γνωστός πίνακας των συντελεστών των συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων, που συνήθως είναι θετικά ορισμένος.

Όταν οι παρατηρήσεις είναι ισοβαρείς $(\mathbf{Q} = \mathbf{I})$ και ο πίνακας σχεδιασμού $\mathbf{A}$ είναι πλήρους βαθμού, ο Adrien-Marie Legendre (1752-1833) το 1806 και ο Carl-Friedrich Gauss (1777-1855) το 1809, διατύπωσαν τη θεωρία ότι η βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση των παραμέτρων $\mathbf{x}$ προκύπτει από το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \min$. Εκατό χρόνια αργότερα, στις αρχές του 20ου αι. ο Andrei Markov (1856-1922) διατύπωσε την ίδια θεωρία χωρίς την (περιττή για την εκτίμηση) υπόθεση της κανονικής κατανομής των παρατηρήσεων. Λόγω της συμβολής του αυτής το θεώρημα των ελαχίστων τετραγώνων αναφέρεται και ως θεώρημα Gauss-Markov. Εάν οι παρατηρήσεις δεν είναι ισοβαρείς $(\mathbf{Q} \neq \mathbf{I})$, αλλά συνοδεύονται από έναν πίνακα συμμεταβλητοτήτων θετικά ορισμένο, ο Alexander Craig Aitken (1895-1967), ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της Νέας Ζηλανδίας, πρότεινε το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\,\mathbf{v} = \min.$, που οδηγεί στη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση όταν ο πίνακας βάρους δεν επιλέγεται αυθαίρετα, αλλά ως ο αντίστροφος του πίνακα συμμεταβλητοτήτων $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$.

Στην περίπτωση που ο πίνακας σχεδιασμού $\mathbf{A}$ παρουσιάζει αδυναμία βαθμού, μια διαπίστωση που διατυπώθηκε πρώτα από τον ινδό μαθηματικό Raj Chandra Bose (1901-1987), ο Ινδός επίσης κορυφαίος και εν ζωή μαθηματικός Calyampudi Radhakrishna Rao (C. R. Rao 1945, 1962) έδειξε ότι η θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων ισχύει και ότι οποιαδήποτε επιλογή γενικευμένου αντίστροφου για τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων των κανονικών εξισώσεων οδηγεί στη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση $\hat{q} = \mathbf{a}^T\hat{\mathbf{x}}$ κάθε εκτιμήσιμου μεγέθους $q = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$. Η έννοια του ψευδό-αντίστροφου πίνακα εισήχθη από τον σουηδό μαθηματικό Erik Ivar Fredholm (1866-1927) το 1903 και ο ψευδό-αντίστροφος πίνακας περιγράφηκε ανεξάρτητα από τον αμερικανό μαθηματικό Eliakim Hastings Moore (1862-1932) το 1920, τον σουηδό γεωδαίτη Arne Bjerhammar (1917-2011) το 1951 και τον άγγλο φυσικό Roger Penrose το 1955.

Πίνακας 1.

α. Εξισώσεις με πλήρη βαθμό με θετικά ορισμένα πίνακα συμμεταβλητοτήτων: $r(\mathbf{A}) = m,\ r(\mathbf{Q}) = n$

β. Εξισώσεις χωρίς πλήρη βαθμό (συνόρθωση με μη εκτιμήσιμες άγνωστες παραμέτρους) με θετικά ορισμένα πίνακα συμμεταβλητοτήτων: $r(\mathbf{A}) < m,\ \ r(\mathbf{Q}) = n$

γ. Εξισώσεις με πλήρη βαθμό με μη θετικά ορισμένα πίνακα συμμεταβλητοτήτων: $r(\mathbf{A}) = m,\ \ r(\mathbf{Q}) < n$

δ. Εξισώσεις χωρίς πλήρη βαθμό με μη θετικά ορισμένα πίνακα συμμεταβλητοτήτων (το γενικό γραμμικό μοντέλο): $r(\mathbf{A}) < m,\ r(\mathbf{Q}) < n$

Ο πίνακας σχεδιασμού $\mathbf{A}$ δεν έχει σε κάθε περίπτωση πλήρη βαθμό στηλών. Για παράδειγμα, στις γεωδαιτικές εφαρμογές η αδυναμία βαθμού του πίνακα αυτού σχετίζεται με το πρόβλημα ορισμού της θέσης του συστήματος αναφοράς των συντεταγμένων των κορυφών του δικτύου ως προς το δίκτυο, γνωστό στη γενικότερη ορολογία βελτιστοποίησης των δικτύων ως πρόβλημα σχεδιασμού μηδενικής τάξης. Το πρόβλημα αυτό κυριάρχησε στη διεθνή γεωδαιτική βιβλιογραφία στη δεκαετία του 70 με αρχή την πρωτοποριακή εργασία του Meissl (1968), που χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον όρο εσωτερικές συντεταγμένες (inner coordinates) και την συστηματική μελέτη και την εκλαΐκευση της νέας θεωρίας από τον Blaha (1971), ενώ παραμένει και σήμερα επίκαιρο για τις εφαρμογές του στα δίκτυα GPS καθώς και στα διαχρονικά δίκτυα μελέτης παραμορφώσεων. Η φύση του προβλήματος έχει αναλυθεί και αποσαφηνισθεί σε δύο σημαντικές εργασίες των Grafarend and Schaffrin (1974, 1976), ενώ η σχέση ανάμεσα στις εναλλακτικές λύσεις του προβλήματος επιλογής των ελαχίστων δεσμεύσεων με το πρόβλημα της εκτίμησης των εσωτερικών συντεταγμένων του Meissl έχει καθοριστεί με την εισαγωγή του μετασχηματισμού *S* από τον Baarda (1973).

Ο πίνακας των συντελεστών των συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων **Q** είναι συνήθως θετικά ορισμένος. Σε περιπτώσεις όμως "συνθετικών" παρατηρήσεων μπορεί να προκύψει θετικά ημιορισμένος, όπως π.χ. στην "διαχωρισμένη συνόρθωση" των διαχρονικών γεωδαιτικών δικτύων, όπου οι συντεταγμένες που προκύπτουν από τις χωριστές συνορθώσεις για κάθε εποχή, αποτελούν τις παρατηρήσεις στην ταυτόχρονη συνόρθωση όλων των εποχών για την εκτίμηση π.χ. των ταχυτήτων μετακίνησης ή των παραμέτρων παραμόρφωσης. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται επίσης οι σχετικές επιλογές των γενικευμένων αντίστροφων πινάκων, για τον υπολογισμό των πινάκων βάρους, έτσι ώστε η λύση του συστήματος των εξισώσεων παρατήρησης της σχέσης (1) να ταυτίζεται με τη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση. Από τους Rao and Mitra (1971b) αναπτύχθηκε μια γενικευμένη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων που ισχύει ανεξάρτητα αν ο πίνακας **Q** είναι μοναδιαίος ή όχι. Σχετικές εργασίες στη γεωδαιτική βιβλιογραφία δόθηκαν από τους Bjerhammer (1973) Uotila (1974), Pelzer (1974), Wolf (1979), Perelmuter (1981), Caspary (1983), Sjöberg (1985), Nkuite & Mierlo (1998) και Rossikopoulos (2010).

2. Ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων

Η εκτίμηση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ταυτίζεται με τη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση όταν ο πίνακας (συμ)μεταβλητοτήτων **Q** των παρατηρήσεων είναι θετικά ορισμένος και ο πίνακας βάρους προκύπτει ως ο αντίστροφος $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$. Στις περιπτώσεις συνόρθωσης με συνθετικές παρατηρήσεις, όπως στην περίπτωση της "διαχωρισμένης συνόρθωσης" των διαχρονικών δικτύων, όπου οι συντεταγμένες που προέκυψαν από τις χωριστές συνορθώσεις για κάθε εποχή αποτελούν τις παρατηρήσεις στην ταυτόχρονη συνόρθωση όλων των εποχών, ο πίνακας των συντελεστών των συμμεταβλητοτήτων τους **Q** δεν είναι θετικά ορισμένος. Τότε, η βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων **x** μπορεί να προκύψει όταν ως πίνακας βάρους **P** επιλεχθεί οποιοσδήποτε γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα **Q** $(\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-})$, επομένως και ο ψευδοαντίστροφος πίνακας $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{+}$. Στην περίπτωση αυτή η βέλτιστη ανεπηρέαστη εκτίμηση των παραμέτρων **x** δεν εξαρτάται από την επιλογή του γενικευμένου αντίστροφου πίνακα $\mathbf{Q}^{g}$ (Mitra and Rao 1968).

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορεί να βρεθεί ένας πίνακας βάρους **P** τέτοιος ώστε να οδηγεί στη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση των παραμέτρων **x** σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα αν αντιστρέφεται ή όχι ο πίνακας **Q**. Η απάντηση είναι ότι τέτοιος πίνακας υπάρχει και προκύπτει ως γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα $(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^{T})$

$$\mathbf{P}=\mathbf{M}^{g}=(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^{T})^{g} \tag{3}$$

όπου ο πίνακας **U** είναι κάποιος συμμετρικός πίνακας, επιλεγμένος έτσι ώστε ο βαθμός του πίνακα $\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^{T}$ να είναι ίσος με τον βαθμό του [**Q A**]. Η λύση αυτή δόθηκε από τον Rao και Mitra (1971b) και Rao (1971, 1972), όπου αναπτύχθηκε μια "γενικευμένη μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων" (unified theory of least squares) ανεξάρτητα αν αντιστρέφεται η όχι ο πίνακας **Q**, και στη συνέχεια προτάθηκε στη γεωδαιτική βιβλιογραφία από τους Bjerhammer (1973) και Uotila (1974).

Από το σύστημα των εξισώσεων των παρατηρήσεων (1), ικανοποιώντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων

$$\mathbf{v}^T\mathbf{P}\,\mathbf{v} = \mathbf{v}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^g\,\mathbf{v} = \min. \tag{4}$$

όπου $\mathbf{P}=\mathbf{M}^g$, προκύπτει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\mathbf{N}\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u} \tag{5}$$

όπου $\mathbf{N}=\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{A}=\mathbf{A}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^g\mathbf{A}$ και $\mathbf{u}=\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{b}=\mathbf{A}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^g\mathbf{b}$. Από το παραπάνω σύστημα των κανονικών εξισώσεων προκύπτει η η λύση $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{N}^g\mathbf{u}$, που δεν είναι ανεπηρέαστη εκτίμηση του $\mathbf{x}$ (επειδή $r(\mathbf{A})<m$), οδηγεί όμως στη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση $\hat{q}=\mathbf{a}^T\hat{\mathbf{x}}$ κάθε εκτιμήσιμου μεγέθους $q=\mathbf{a}^T\mathbf{x}$, για τη συγκεκριμένη επιλογή του πίνακα βάρους, καθώς και για οποιονδήποτε γενικευμένο αντίστροφο του πίνακα $\mathbf{Q}$ (Rao 1971, 1972, 1973, Drygas 1975).

Σχετικά με την παραπάνω επιλογή του πίνακα βάρους ισχύουν τα παρακάτω:

1. Ο πίνακας βάρους της σχέσης (3) μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενική λύση, εφόσον αν ο $\mathbf{Q}$ είναι θετικά ορισμένος αποδεικνύεται ότι η λύση που προκύπτει με την επιλογή αυτή είναι ισοδύναμη με τη λύση όπου $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$. Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης είναι απλή: Επειδή και ο πίνακας $\mathbf{M}$ είναι ομαλός και $\mathbf{P}=\mathbf{M}^{-1}=(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^{-1}$, ισχύουν οι σχέσεις

$$\left[\mathbf{A}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^{-1}\mathbf{A}\right]\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^{-1}\mathbf{b}$$

ή

$$\left[\mathbf{I}-\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\right]\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{I}-\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\right]\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

και επειδή ο πίνακας $\mathbf{I}-\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}$ είναι ομαλός, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}.$$

2. Το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\,\mathbf{v}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του γενικευμένου αντίστροφου $\mathbf{P}=(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^g$ και γενικότερα, κάτω από ειδικές συνθήκες (Rao 1972) που συνήθως ικανοποιούνται στις γεωδαιτικές εφαρμογές (Nkuite and Mierlo 1998), είναι ανεξάρτητο από οποιαδήποτε επιλογή του γενικευμένου αντίστροφου $\mathbf{Q}^g$. Ισχύει η σχέση

$$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{Q}^g\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^g\hat{\mathbf{v}} \tag{7}$$

3. Ο πίνακας $\mathbf{M}^g$ δεν είναι κατ' ανάγκη γενικευμένος αντίστροφος του $\mathbf{Q}$. Ωστόσο, ο πίνακας $\mathbf{U}$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε ο $\mathbf{M}^g$ να είναι γενικευμένος αντίστροφος του $\mathbf{Q}$.

4. Μια απλή επιλογή του πίνακα $\mathbf{U}$ είναι η $\mathbf{U}=\delta^2\,\mathbf{I}, \mathbf{P}=(\mathbf{Q}+\delta^2\mathbf{AA}^T)^g$, όπου ο συντελεστής δ^2 ($\delta\neq 0$) ρυθμίζει την τάξη μεγέθους των στοιχείων του πίνακα $\mathbf{AA}^T$ σε σχέση με τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{Q}$. Αυτή η επιλογή του $\mathbf{U}$ φαίνεται να έχει μερικά πλεονεκτήματα. Ακόμη και αν ο $\mathbf{Q}$ δεν είναι θετικά ορισμένος, μπορεί ο $\mathbf{M}$ να είναι ομαλός και ο πίνακας βάρους $\mathbf{P}$ να προκύψει ως ο κανονικός αντίστροφος ($\mathbf{P}=\mathbf{M}^{-1}$). Στην περίπτωση που ο $\mathbf{Q}$ είναι θετικά ορισμένος αλλά η ορίζουσά του είναι κοντά στο μηδέν, ο υπολογισμός του αντίστροφου $(\mathbf{Q}+\delta^2\mathbf{AA}^T)^{-1}$μπορεί να είναι πιο σταθερός απ' ότι του $\mathbf{Q}^{-1}$.

3. Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

Η λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων (5), με δεσμεύσεις $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$, είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του πίνακα βάρους $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$ όταν ο $\mathbf{Q}$ είναι ομαλός, $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^g$ όταν ο $\mathbf{Q}$ είναι μοναδιαίος, ή γενικά $\mathbf{P}=\mathbf{M}^g$ ανεξάρτητα αν ο $\mathbf{Q}$ είναι ομαλός ή όχι), και δίνεται από τις γνωστές σχέσεις (Δερμάνης 1986):

1. Η λύση με ελάχιστες δεσμεύσεις:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^g \mathbf{u} + \mathbf{E}^T (\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{E}^T (\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{z} \tag{8}$$

όπου $\mathbf{N}^g$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα **N**, ο οποίος σχετίζεται με τη συγκεκριμένη επιλογή των ελαχίστων δεσμεύσεων

$$\mathbf{N}^g = (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} - \mathbf{E}^T (\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1} (\mathbf{E}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{E} \tag{9}$$

$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}$, **E** είναι πίνακας πλήρους βαθμού, διαστάσεων ίσων με τον πίνακα **H** και τέτοιος ώστε $\mathbf{A}\mathbf{E}^T = \mathbf{0}$. Μία επιλογή του πίνακα **E** είναι αυτή των εσωτερικών δεσμεύσεων. Η λύση με εσωτερικές δεσμεύσεις $\mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^+ \mathbf{u} = (\mathbf{N} + \mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{u} \tag{10}$$

όπου $\mathbf{N}^+$ είναι ο ψευδοαντίστροφος πίνακας του **N**,

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{N} + \mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E}\mathbf{E}^T)^{-1} (\mathbf{E}\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E} \quad . \tag{11}$$

2. Η λύση με πλεονάζουσες δεσμεύσεις:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= [\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}]\ \mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{z} = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_R - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}}_R - \mathbf{z}) \end{aligned} \tag{12}$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}$, $\hat{\mathbf{x}}_R = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{u}$ και ο γενικευμένος αντίστροφος είναι

$$\mathbf{N}^g = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}. \tag{13}$$

Οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων των παρατηρήσεων δίνονται από τις σχέσεις $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}$ και η *τετραγωνική ανεπηρέαστη εκτίμηση ελάχιστης νόρμας* (Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation, MINQUE) της άγνωστης μεταβλητότητας αναφοράς, για τις επιλογές $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^g$ και $\mathbf{P} = \mathbf{M}^g$ είναι

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{f}\,\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}^g\,\hat{\mathbf{v}} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{f}\,\hat{\mathbf{v}}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A}^T)^g\,\hat{\mathbf{v}} \tag{14}$$

(βλ. Παράρτημα 2.) όπου $f = tr(\mathbf{R})$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας και οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων $\hat{\mathbf{v}}$ που αντιστοιχούν στις πραγματικές τους τιμές **v** μέσω του πίνακα **R**

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^g \mathbf{A}^T \mathbf{P})\,\mathbf{v} = \mathbf{R}\,\mathbf{v} \tag{15}$$

Η μεταβλητότητα της μεταβλητότητας αναφοράς (θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή) είναι

$$\sigma^2(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\hat{\sigma}^4}{f} \tag{16}$$

Οι πίνακες συμμεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ και $\hat{\mathbf{y}}$, για τις γενική επιλογές του πίνακα βάρους $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^g$ και $\mathbf{P} = \mathbf{M}^g$, και για όλες τις παραπάνω επιλογές των δεσμεύσεων, δίνονται από τις σχέσεις

Περίπτωση $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^g$: $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{N}^g \mathbf{N}\,\mathbf{N}^g$ (17)

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2 \left(\mathbf{Q} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T\right) = \hat{\sigma}^2 \left(\mathbf{Q} - \mathbf{A}\mathbf{N}^g \mathbf{A}^T\right) \tag{18}$$

όπου $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}\,\mathbf{A}$ και χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα $\mathbf{A}\,\mathbf{N}^g \mathbf{N} = \mathbf{A}$.

Περίπτωση $\mathbf{P} = \mathbf{M}^g = (\mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A}^T)^g$: $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2 \left(\{\mathbf{A}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A}^T)^g \mathbf{A}\}^g - \mathbf{U}\right)$ (19)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} &= \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2 \left(\mathbf{Q} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T\right) = \hat{\sigma}^2 \left(\mathbf{Q} - \mathbf{A}\left(\{\mathbf{A}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A}^T)^g \mathbf{A}\}^g - \mathbf{U}\right)\mathbf{A}^T\right) = \\ &= \hat{\sigma}^2 \left(\mathbf{M} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{M}^g \mathbf{A})^g \mathbf{A}^T\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Για τις διορθωμένες παρατηρήσεις: $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T$.

Όταν ο **Q** είναι ομαλός πίνακας, επειδή ισχύει η σχέση (βλ. Παράρτημα 1.)

$$[\mathbf{A}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^{-1} \mathbf{A}]^g = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^g + \mathbf{U} \tag{21}$$

αποδεικνύεται ότι ο πίνακας των συντελεστών των συμμεταβλητοτήτων των συνορθωμένων παραμέτρων γίνεται $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^g$.

4. Η στατιστική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων

Ένας αρχικός ολικός έλεγχος της ορθότητας των αποτελεσμάτων των παραπάνω εκτιμήσεων γίνεται με τη βοήθεια των στατιστικού ελέγχου της μεταβλητότητας αναφοράς $\hat{\sigma}^2$. Η μηδενική υπόθεση $H_o : \sigma^2 = \sigma_o^2$ για τη μεταβλητότητα αναφοράς σ^2, όπου σ_o^2 είναι μια γνωστή αρχική της τιμή, ελέγχεται σε σχέση με την εναλλακτική υπόθεση $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_o^2$ με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\chi = \frac{f\,\hat{\sigma}^2}{\sigma_o^2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}}{\sigma_o^2} \sim \chi_f^2 \quad \text{ή, εναλλακτικά} \quad F = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_o^2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}}{f\,\sigma_o^2} \sim F_{f,\infty} \tag{22}$$

όπου $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ όταν ο πίνακας **Q** είναι ομαλός, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^g$ όταν ο **Q** δεν είναι θετικά ορισμένο, ή γενικά $\mathbf{P} = (\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^g$ ανεξάρτητα αν ο **Q** είναι ομαλός ή όχι.

Για την εφαρμογή της σάρωσης δεδομένων στην περίπτωση των συσχετισμένων παρατηρήσεων, υπολογίζονται τα τροποποιημένα σφάλματα

$$\hat{\bar{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}} \ , \quad \mathbf{Q}_{\hat{\bar{\mathbf{v}}}} = \mathbf{P}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{P} \tag{23}$$

για κάθε περίπτωση του πίνακα **P** ($\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$, ή $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^g$, ή $\mathbf{P} = (\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^g$). Ο έλεγχος βασίζεται στη σχέση

$$t_i = \tau_i \sqrt{\frac{f-1}{f-\tau_i^2}} \sim t_{f-1} \tag{24}$$

όπου το εσωτερικά ομαλοποιημένο τ_i σφάλμα είναι

$$\tau_i = \frac{\hat{\bar{v}}_i}{\hat{\sigma}(\hat{\bar{v}}_i)} = \frac{\hat{\bar{v}}_i}{\hat{\sigma}\,\bar{q}_{ii}} = \frac{(\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}})_i}{\hat{\sigma}\,\sqrt{(\mathbf{P}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{P})_{ii}}} \tag{25}$$

όπου $\bar{q}_{ii}^2 = q^2(\hat{\bar{v}}_i) = (\mathbf{P}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{P})_{ii}$ είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας του τροποποιημένου σφάλματος $\hat{\bar{v}}_i = (\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}})_i$.

Στην πολλαπλή σάρωση δεδομένων, όπου ελέγχονται ταυτόχρονα n_2 παρατηρήσεις, η μηδενική υπόθεση $H_o : \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, ελέγχεται σε σύγκριση με την εναλλακτική $H_2 : \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ και ο έλεγχος βασίζεται στην ποσότητα

$$T = \frac{\hat{\mathbf{v}}_2^T (\mathbf{P}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{N}^g \mathbf{A}_2^T)^{-1} \hat{\mathbf{v}}_2}{n_2\,\hat{\sigma}^2} \ , \quad F = T\,\frac{f - n_2}{f - n_2\,T} \sim F_{n_2, f-n_2} \tag{27}$$

όπου ο δείκτης (2) αντιστοιχεί στις n_2 παρατηρήσεις που ελέγχονται.

Για τον έλεγχο της γενικής υπόθεσης, έστω ότι πρέπει να ελεγχθούν k συναρτήσεις των m παραμέτρων **x**. Η γενική υπόθεση H_o: $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$, ελέγχεται σε σύγκριση με την εναλλακτική H_a : $\mathbf{H}\,\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$ και η στατιστική ποσότητα, που ακολουθεί την κατανομή F, είναι

$$F = \frac{(\mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z})^T (\mathbf{H}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H}^T)^g (\mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z})}{k\,\hat{\sigma}^2} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{S}^g\,\hat{\mathbf{e}}}{k\,\hat{\sigma}^2} \sim F_{k,f} \tag{28}$$

όπου $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}$ και $\mathbf{S} = \mathbf{H}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^T = \mathbf{H}\Big(\{\mathbf{A}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^g\,\mathbf{A}\}^g - \mathbf{U}\Big)\mathbf{H}^T$. (29)

Ο εναλλακτικός τύπος του παραπάνω ελέγχου

$$F = \frac{f}{k}\frac{\delta\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}} = \frac{f}{k}\frac{\delta\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}_H - \delta\hat{\varphi}} \sim \; F_{k,f} \tag{30}$$

ισχύει μόνο στην περίπτωση που ο πίνακας βάρους προκύπτει ως ο κανονικός αντίστροφος $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ ή ως γενικευμένος αντίστροφος $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^g$ του πίνακα $\mathbf{Q}$. Όταν ο πίνακας βάρους προκύπτει ως ο γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{M} = \mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T$, η ποσότητα $\hat{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}^g\,\hat{\mathbf{e}}$ δεν μπορεί να προκύψει ως η διαφορά $\delta\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_H - \hat{\varphi}$, όπου $\hat{\varphi}_H = \hat{\mathbf{v}}_H^T\,\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}_H$ το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων στη συνόρθωση με δεσμεύσεις $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$ και $\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}$ η αντίστοιχη ποσότητα της αρχικής συνόρθωσης χωρίς δεσμεύσεις.

5. Ανακεφαλαίωση

Το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί στη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση όταν ο πίνακας βάρους δεν επιλέγεται αυθαίρετα, αλλά προκύπτει ως ο αντίστροφος $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ του πίνακα συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων.

Στην περίπτωση που ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων είναι δεν είναι θετικά ορισμένος, το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί στη βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση όταν ως πίνακας βάρους επιλέγεται ο οποιοσδήποτε γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων ($\mathbf{P} = \mathbf{Q}^g$), κατά συνέπεια και ο ψευδοαντίστροφος πίνακας ($\mathbf{P} = \mathbf{Q}^+$).

Σύμφωνα με τη γενικευμένη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων των Rao and Mitra (1971b), η επιλογή $\mathbf{P} = \mathbf{M}^g = (\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^g$ ως πίνακας βάρους, ισχύει σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα αν ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων $\mathbf{Q}$ είναι πλήρους βαθμού ή όχι, ανεξάρτητα αν υπάρχουν δεσμεύσεις για τις παραμέτρους $\mathbf{x}$ ή όχι και ανεξάρτητα από τον βαθμό του πίνακα σχεδιασμού $\mathbf{A}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν απαιτείται κάποια ειδική επιλογή γενικευμένου αντίστροφου του πίνακα $\mathbf{M}$, καθώς όλες οι σχετικές λύσεις είναι ανεξάρτητες από την επιλογή αυτή.

Παράρτημα 1. Οι αποδείξεις

1. <u>Αν **Q** και **U** είναι δύο θετικά ορισμένοι πίνακες, τότε ισχύει η σχέση</u>

$$\mathbf{U}\,\mathbf{A}^T(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1} \tag{1.1}$$

Αν πολλαπλασιαστούν και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με τον $(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{U}^{-1})$ προκύπτει

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{U}^{-1})\,\mathbf{U}\,\mathbf{A}^T(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}$$

ή $(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{U}\,\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T)(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}$

ή $\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A}\,\mathbf{U}\,\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}$

ή $\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}$

2. <u>Αν **Q** και **U** είναι δύο θετικά ορισμένοι πίνακες, τότε ισχύει η σχέση</u>

$$(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1} \tag{1.2}$$

Αν πολλαπλασιαστούν και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με τον $(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)$ προκύπτει

$$(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T) = (\mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1})(\mathbf{Q} + \mathbf{AUA}^T)$$

ή $\mathbf{I}=[\mathbf{Q}^{-1}-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}](\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)$

Κάνοντας τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και χρησιμοποιώντας τη σχέση (**) προκύπτει

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{Q}^{-1}-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}](\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)=\\
&\quad=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AUA}^T+\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AUA}^T-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T=\\
&\quad=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AUA}^T+\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AUA}^T(\mathbf{AUA}^T+\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{AUA}^T-(\mathbf{AUA}^T+\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{AUA}^T=\\
&\quad=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AUA}^T+\mathbf{I}-(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AUA}^T+\mathbf{I})(\mathbf{AUA}^T+\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{AUA}^T=\\
&\quad=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AUA}^T+\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{AUA}^T+\mathbf{Q})(\mathbf{AUA}^T+\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{AUA}^T=\mathbf{I}
\end{aligned}$$

3. Αν **Q** και **U** είναι δύο θετικά ορισμένοι πίνακες, τότε ισχύει η σχέση

$$[\mathbf{A}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^{-1}\mathbf{A}]^g=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^g+\mathbf{U} \tag{1.3}$$

Από τη σχέση (1.2) προκύπτει

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^{-1}\mathbf{A}]^g&=[\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}]^g=\\
&=[\mathbf{N}-\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{N}]^g
\end{aligned}$$

Να αποδειχθεί ότι: $[\mathbf{N}-\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{N}]^g=\mathbf{N}^g+\mathbf{U}$.
Θα αποδείξουμε γενικότερα ότι: $\mathbf{N}_1^g+\mathbf{N}_2^g=\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1$
Κατ' αρχή:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_2&=\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2-\mathbf{N}_1)=\\
&=\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)-\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1=\\
&=\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1
\end{aligned}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_2&=(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2-\mathbf{N}_2)(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_2=\\
&=\mathbf{N}_2-\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_2\\
&=\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)-\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_2=\\
&=\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1
\end{aligned}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1)(\mathbf{N}_1^g+\mathbf{N}_2^g)(\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1)=\\
&\qquad=\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1
\end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας $\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2)^g\mathbf{N}_1$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του $\mathbf{N}_1^g+\mathbf{N}_2^g$ και αν θέσουμε $\mathbf{N}_1=\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$ και $\mathbf{N}_2=\mathbf{U}^{-1}$ αποδεικνύεται η 1.3.

Παράρτημα 2. Η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}=tr[\hat{\mathbf{v}}\,\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}] \text{ και } E\{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}\}=E\{tr[\hat{\mathbf{v}}\,\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}]\}=tr[E\{\hat{\mathbf{v}}\,\hat{\mathbf{v}}^T\}\mathbf{P}]$$

Περίπτωση $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^g$: $E\{\hat{\mathbf{v}}\,\hat{\mathbf{v}}^T\}=\hat{\sigma}^2\left(\mathbf{Q}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^g\mathbf{A})^g\mathbf{A}^T\right)$

$$\begin{aligned}
E\{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}\}&=tr[\sigma^2(\mathbf{Q}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^g\mathbf{A})^g\mathbf{A}^T)\mathbf{Q}^g)]=\\
&=\sigma^2[tr(\mathbf{QQ}^g)-tr(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^g\mathbf{A})^g\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^g)]=\\
&=\sigma^2[n-tr((\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^g\mathbf{A})^g\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^g\mathbf{A})]=\sigma^2[n-m+k]=f\sigma^2
\end{aligned}$$

Περίπτωση $\mathbf{P}=\mathbf{M}^g=(\mathbf{Q}+\mathbf{AUA}^T)^g$: $E\{\hat{\mathbf{v}}\,\hat{\mathbf{v}}^T\}=\hat{\sigma}^2\left(\mathbf{M}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^g\mathbf{A})^g\,\mathbf{A}^T\right)$

$$
\begin{aligned}
E\{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}\} &= tr[\sigma^2(\mathbf{M}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^g\mathbf{A})^g\,\mathbf{A}^T)\mathbf{M}^g)]= \\
&=\sigma^2[tr(\mathbf{M}\mathbf{M}^g)-tr(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^g\mathbf{A})^g\,\mathbf{A}^T\mathbf{M}^g)]= \\
&=\sigma^2[n-tr((\mathbf{A}^T\mathbf{M}^g\mathbf{A})^g\,\mathbf{A}^T\mathbf{M}^g\mathbf{A})]=\sigma^2[n-m+k]=f\sigma^2
\end{aligned}
$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathbf{A}\,\mathbf{N}^g\mathbf{N}=\mathbf{A}$ και $tr[(\mathbf{A}\,\mathbf{N}^g)(\mathbf{A}^T\mathbf{P})]=tr[(\mathbf{A}^T\mathbf{P})(\mathbf{A}\,\mathbf{N}^g)]=tr(\mathbf{N}\,\mathbf{N}^g)=m-k$, όπου *m* είναι η διάσταση του πίνακα $\mathbf{N}=\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{A}$ και *k* η αδυναμία βαθμού.

Επομένως, μία ανεπηρέαστη εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς είναι η

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-m+k}\,\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}} \quad \text{καθώς} \quad E\{\hat{\sigma}^2\}=\frac{1}{n-m+k}\,E\{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}}\}=\sigma^2 \quad . \tag{2.1}$$

Βιβλιογραφία

Δερμάνης, Α., "*Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης*", 1986, Εκδόσεις Ζήτη.

Ρωσσικόπουλος, Δ., "*Τεκτονική Γεωδαισία. Μετρώντας τις παραμορφώσεις του γήινου φλοιού και των τεχνικών έργων*", 2010, Εκδόσεις Ζήτη (υπό έκδοση).

Albert, A., "*The Gauss-Markov Theorem for Regression Models with Possibly Singular Covariances*", SIAM J. Appl. Math., Vol. 24, No. 2, pp. 182-187, 1973.

Baarda, W., "*S-Transformation and Criterion Matrices*", Netherlands Geodetic Commision, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 5, No. 1, 1973.

Bjerhammar, A., "*Application of calculus of matrices to method of least squares; with special references to geodetic calculations*", Trans. Roy. Inst. Tech., 1951, Stockholm.

Bjerhammar, A., "*Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*", 1973, Elsevier Scientific Publishing Company.

Blaha, G., "*Inner Adjustment Constraints with Emphasis on Range Observations*", Department of Geodetic Science, Report No. 148, 1971, The Ohio State University.

Drygas, H., "*Estimation and Prediction for linear models in general spaces*", Math. Operationsf. Und Statistic, 6, pp. 301-324, 1975.

Fredholm,E. I., "*Sur une classe d' équations fonctionnelles*", Acta Mathematica 27, pp. 365–390, 1903.

Grafarend, E. and B. Schaffrin, "*Unbiased Free Net Adjustment*", Survey Review, vol. XXII, No. 171, pp. 200-218, 1974.

Grafarend, E. and B. Schaffrin, "*Equivalence of Estimable Quantities and Invariants in Geodetic Networks*", Zeitsschrift für Vermessungswesen, 101, 11, pp. 485-491, 1976.

Meissl, P., "*Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens*", in: R. Rinner, K. Killian and P. Meissl (eds.): Beiträge zur theorie der Geodätischen Netze in Raum, Deutssche Geodätische Kommission, Reihe A, 61, pp. 8-21, 1969.

Mitra, S. K. and C. R. Rao, "*Some results in estimation and tests of linear hypotheses under the Gauss-Markoff model*", Sankhyâ, A, pp. 281-290, 1968.

Moore, E. H., "*On the reciprocal of the general algebraic matrix*", Bulletin of the American Mathematical Society 26, pp. 394–395, 1920.

Niemeir, W., "*Zur Kongruenz mehrfach beobachterer geodätischer Netze*", Wiss. Arb. Fachr. Vermessungswesen, No. 88, 1979, Universitat Hannover.

Nkuite, G., "*Ausgleichung mit singülarer Varianzkovarianzmatrix am Beispiel der geomentrischen*

Deformationsanalyse", Deutssche Geodätische Kommission, Reihe C, 501, 1998.

Nkuite, G. and Jan van Mierlo, "*The General Linear Model – a Solution by Means of the Condition Adjustment"*, In: B. Bencolini (ed): IV Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy. IAG Symposium 122, pp. 147-157, Springer-Velrag.

Perelmuter, A., "*Adjustment with a Singular Weight Matrix"*, AVN, 6, pp. 239-242, 1981.

Pelzer, H., "*Zur Behandlung Singulärer Ausgleichungsaufgaben I"*, Zeitsschrift für Vermessungswesen 99, Heft 5, pp. 181-194, 1974a.

Pelzer, H., "*Zur Behandlung Singulärer Ausgleichungsaufgaben II"*, Zeitsschrift für Vermessungswesen 99, Heft 11, pp. 479-488, 1974b.

Penrose, R., "*A generalized inverse for matrices"*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51, pp. 406–413, 1955.

Rao, C. R., "*Generalization of Markoff's theorem and test of linear hypothesis"*, Sankhyâ, 7, pp. 9-16, 1945.

Rao, C. R., "*A note on a generalized inverse of a matrix with application to problems in mathematical statistics"*, J. Roy. Statist. Soc., B, 24, pp. 152-158, 1962.

Rao, C. R., "*Unified Theory of Linear Estimation"*, Sankhyâ, A, 33, pp. 371-394, 1971.

Rao, C. R., "*Unified Theory of Least Squares"*, Computations in Statistics, 1(1), pp. 1-8, 1972.

Rao, C. R., "*Linear Statistical Inference and Its Applications"*, 1973, John Wiley and Sons.

Rao, C. R., "*Least Squares Theory for Possibly Singular Models"*, The Canadian Journal of Statistics, Vol. 6, No. 1, pp. 19-23, 1978.

Rao, C. R. and Mitra, "*Generalized Inverse of Matrices and its Applications"*, 1971a, John Wiley and Sons.

Rao, C. R. and Mitra, "*Further Contributions to theory of Generalized Inverse of Matrices and its Applications"*, Sankhyâ, A, 33, pp. 289-300, 1971b.

Rossikopoulos, D., "*On the Unified Approach of the Least Squares Method"*, In: M.E. Kontadakis, C. Kaltsikis, S. Spatalas, K. Tokmakidis, I.N. Tziavos (eds): The Apple of Knowledge. Volume in honor of Prof. D. Arabelos. Publication of the School of Rural & Surveying Engineering, pp. 217-224, 2010, Aristotle University of Thessaloniki.

Sjoberg, L., "*Adjustment and Variance-Covariance Component Estimation with a Singular Covariance Matrix"*, Zeitsschrift für Vermessungswesen, 4, pp. 145-151, 1985.

Uotila, U., "*Generalized Inverse as a Weight Matrix"*, The Canadian Surveyor, vol. 28, No. 5, pp. 698-701, 1974.

Wolf, H., "*Singuläre Kovarianzen im Gauss-Helmert Modell"*, Zeitsschrift für Vermessungswesen, 104, Heft 10, pp. 437-442, 1979.