ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΕΚΤΙΜΗΤΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΒΩΣΗΣ ΖΥΓΩΝ ΠΙΕΣΗΣ

Χ. Λ. ΜΗΤΣΑΣ
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΜΕΤΡΟΛΟΓΙΑΣ (Ε.Ι.Μ.),
Δ/ΝΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ, ΒΙ.ΠΕ.Θ., ΟΙΚ. ΤΕΤ. 45, ΣΙΝΔΟΣ 57022
email: chris.mitsas@eim.gr

Περίληψη: Η μεθοδολογία ανάλυσης των αποτελεσμάτων διακρίβωσης ενός ζυγού πίεσης μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την ακρίβεια προσδιορισμού της δραστικής επιφάνειας και κατ'επέκταση την ισχυριζόμενη αβεβαιότητα. Ο εκτιμητής των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων με κατάλληλους παράγοντες στάθμισης έχει βέλτιστη επίδοση ως προς την αμεροληψία και διακύμανση.

1. Εισαγωγή

Η πειραματική υλοποίηση της πίεσης γίνεται σήμερα σχεδόν αποκλειστικά με την χρήση ζυγών πίεσης. Το κύριο στοιχείο αυτών των διατάξεων είναι ένα σύστημα εμβόλου/ χιτωνίου (Piston Cylinder Assembly ή PCA) το οποίο παράγει γνωστή πίεση όταν βρίσκεται σε ψευδο-στατική ισορροπία υπό την επίδραση των αντίρροπων δυνάμεων που προέρχονται από το βάρος εφαρμοζόμενου φορτίου γνωστής μάζας και την πίεση εντός του συστήματος. Το βασικό χαρακτηριστικό των διατάξεων PCA είναι η δραστική επιφάνειά τους (effective area), δηλ., η ποσότητα η οποία όταν διαιρέσει την εφαρμοζόμενη δύναμη παράγει την αντίστοιχη πίεση και στην ουσία αποτελεί την διατομή μιας νοητής κυλινδρικής επιφάνειας μεταξύ εμβόλου και χιτωνίου η οποία εξαρτάται από τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά, την πίεση και την θερμοκρασία [1].

Ο ορθός προσδιορισμός της δραστικής επιφάνειας καθώς και η εξάρτησή της από τις παραπάνω παραμέτρους γίνεται συγκριτικά σε σχέση με ένα καλά χαρακτηρισμένο πρότυπο σε όλο το εύρος λειτουργίας της διάταξης (cross-float) [2]. Στην πράξη, η διακρίβωση της δραστικής επιφάνειας προϋποθέτει επίσης την γνώση της μάζας του ίδιου του υπό διακρίβωση PCA κάτι που είναι μεν εφικτό αλλά μπορεί να παρουσιάσει προβλήματα λόγω της ανάγκης αποσυναρμολόγησης και καθαρισμού του [3]. Η αποτίμηση των μετρήσεων συνήθως γίνεται με την χρήση ενός πολυωνύμου $2^{ου}$ βαθμού οι σταθερές του οποίου εξαρτώνται από την δραστική επιφάνεια και την μάζα του PCA επιτρέποντας την εκτίμησή τους μέσω προσαρμογής με γραμμικά ελάχιστα τετράγωνα.

Στην παρούσα εργασία θα αξιολογηθεί η επίδοση του εκτιμητή των ελαχίστων τετραγώνων στον προσδιορισμό της δραστικής επιφάνειας ενός PCA, δηλ. θα προσδιορισθούν οι πειραματικές συνθήκες κάτω από τις οποίες ο συγκεκριμένος εκτιμητής παράγει παραμέτρους που είναι βέλτιστες με την έννοια της αμεροληψίας και ελάχιστης διακύμανσης. Ο στόχος αυτός επιτυγχάνεται μέσω αριθμητικής προσομοίωσης (Monte-Carlo) [4] για διάφορα σενάρια μέτρησης.

2. Μετρητικό Μοντέλο

Η σχετική πίεση που παράγεται από ένα ζυγό πίεσης μοντελοποιείται βάσει της σχέσης

$$p = \frac{(C + M)g}{A_o c[1 + f(p)]} + p_H \qquad (1)$$

όπου:

- C η μάζα του PCA καθώς επίσης και οποιαδήποτε άλλη επίδραση που μπορεί να εκληφθεί ως «φαινόμενη» μάζα, όπως π.χ. επιφανειακή τάση, δυναμική άνωση λόγω ιξώδους του μέσου μέτρησης κλπ.
- M η μάζα του συνολικού νεκρού φορτίου που χρησιμοποιείται διορθωμένο για την άνωση του αέρα
$$M = \sum_i m_i (1 - \rho_a/\rho_i)$$
με m_i την μάζα του i φορτίου πυκνότητα ρ_i και ρ_a την πυκνότητα του αέρα.
- g η τοπική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας
- A_o η δραστική επιφάνεια του εμβόλου σε μηδενική πίεση και θερμοκρασία 20^oC
- $c = 1 + \alpha_c(t - 20)$ όπου α_c ο συντελεστής θερμικής διαστολής του συνδυασμού εμβόλου/ χιτωνίου
- f(p) περιγράφει την παραμόρφωση του PCA συναρτήσει της πίεσης και συνήθως προσεγγίζεται ως bp.
- p_H είναι η πίεση λόγω υψομετρικής διαφοράς στάθμης του μέσου μέτρησης

Κατά την διακρίβωση ζυγού πίεσης σε σχέση με έναν άλλον αναφοράς ρυθμίζονται τα φορτία ώστε και οι δύο να βρίσκονται σε ισορροπία [1], ενώ η (1) συσχετίζει την γνωστή πίεση, p_i, που παράγεται από τον δεύτερο με τον λόγο της δύναμης που εφαρμόζεται προς την διορθωμένη για θερμοκρασία και παραμόρφωση δραστική επιφάνεια του πρώτου μέσω της

$$p_i = \frac{(C + M_i)g}{A_o c_i[1 + b\, p_i]} \qquad (2)$$

Αν και εκ πρώτης όψεως η (2) φαίνεται μη -γραμμική σχέση μετά από λίγη επεξεργασία γράφεται ως

$$M_i = -C + \frac{A_o c_i}{g} p_i + \frac{A_o b\, c_i}{g} p_i^2 \qquad (3)$$

δηλ., γραμμική ως προς τις μεταβλητές p_i και p_i^2. Η πίεση $p_H = (\rho_f - \rho_a)g\Delta H$ προσδιορίζεται ανεξάρτητα από την πυκνότητα του μέσου μέτρησης (συνήθως sebacate oil ή ξηρό N_2) και την υψομετρική διαφορά στάθμης του ώστε να μην υπεισέρχεται άμεσα στον προσδιορισμό της δραστικής επιφάνειας του PCA.

Δεδομένου ότι η παραγόμενη πίεση προέρχεται από μία διάταξη αναφοράς τα σφάλματα που την συνοδεύουν είναι αμελητέα ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι προσδιορισμένη ακριβώς. Επιπλέον, επειδή οι τιμές της θερμοκρασίας και της επιτάχυνσης βαρύτητας προέρχονται από ανεξάρτητες μετρήσεις, μπορούμε να τις θεωρήσουμε ορθές κατά την εκτίμηση των παραμέτρων A_o, b και C της σχέσης (3) διαδίδοντας οποιαδήποτε αβεβαιότητα τις συνοδεύει στην αβεβαιότητα των εκτιμήσεών τους. Με τις παραπάνω υποθέσεις η μόνη πηγή σφάλματος της μέτρησης προέρχεται από την μάζα του φορτίου που χρειάζεται ο υπό διακρίβωση ζυγός πίεσης ώστε να βρίσκεται σε ισορροπία με τον ζυγό πίεσης αναφοράς. Τότε, σχέση (3) έχει την γενική μορφή

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4)$$

όπου **y** είναι το διάνυσμα των μετρήσεων, **X** ο πίνακας σχεδιασμού, **β** το διάνυσμα των παραμέτρων και **ε** το διάνυσμα των σφαλμάτων και η εκτίμηση των παραμέτρων A_o, b και C μπορεί να επιτευχθεί με εφαρμογή του εκτιμητή των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων [5]. Οι συνήθεις στατιστικές υποθέσεις που αφορούν στα σφάλματα της μάζας του φορτίου είναι ότι είναι τυχαία και ανεξάρτητα και προέρχονται από διαφορετικές κανονικές κατανομές, δηλ. $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ και $\mathbf{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^T) = \boldsymbol{\Phi}$.

3. Μεθοδολογία Προσομοίωσης

Αν θεωρήσουμε ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του εκτιμητή των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων σε ζεύγη πειραματικών τιμών (p_i, M_i) αποτελούν μία πιθανή εκδοχή της φυσικής πραγματικότητας δηλ. των πραγματικών παραμέτρων του μοντέλου της μέτρησης, τότε η δυνατότητα επανάληψης του πειράματος cross-float και της αντίστοιχης προσαρμογής των δεδομένων πολλές φορές θα μας έδινε την πιθανότερη εκδοχή μέσω της μέσης τιμής και της διακύμανσης των κατανομών που περιγράφουν τις εκτιμηθείσες παραμέτρους. Πρακτικά, αυτό είναι εφικτό μέσω της αριθμητικής προσομοίωσης των πειραμάτων με την μέθοδο Monte Carlo. Ως πλατφόρμα για την συγκεκριμένη εφαρμογή επιλέχθηκε το EXCEL για να αναδειχθεί αφενός η δυνατότητα πραγματοποίησης αρκετά πολύπλοκων προσομοιώσεων σε αυτό και αφετέρου η χρησιμότητα του «πρόσθετου» (add-in) SOLVER, ενός αξιόλογου εργαλείου βελτιστοποίησης [6]. Η ακολουθούμενη μεθοδολογία περιλαμβάνει:

1) <u>Δημιουργία ισο-κατανεμημένων ζευγών τιμών (p_i*, M_i*)</u>
   Τα ζεύγη ικανοποιούν ακριβώς το μετρητικό μοντέλο της σχέσης (3) στο εύρος 7...70 MPa, για δεδομένες παραμέτρους που φαίνονται στον πίνακα 1.

2) <u>Προσθήκη τυχαίων σφαλμάτων ε_i στις μάζες των διακριτών φορτίων M_i*</u>
   Τα σφάλματα ουσιαστικά προέρχονται από την μεταβλητότητα της διεργασίας διακρίβωσης του ζυγού πίεσης και εξαρτώνται από την υπόθεση κατανομής πυκνότητας πιθανοτήτων (pdf) που τα διέπει, η επιλογή της οποίας είναι απόρροια των αντίστοιχων πειραματικών συνθηκών διακρίβωσης ζυγών πίεσης. Οι pdf που χρησιμοποιούνται στην συγκεκριμένη εφαρμογή είναι η κανονική και ορθογωνική [7].
   Μία τυπική επαναληψιμότητα διακρίβωσης ζυγών πίεσης είναι της τάξης των 10 ppm της ονομαστικής τιμής πίεσης ή ισοδύναμα μάζας φορτίου, τα τυχαία σφάλματα, ε_i, που δημιουργήθηκαν προήρθαν από κατανομές με αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις, ενδεικτικά 75 mg στα 7 MPa και 750 mg στα 70 MPa.
   Πρακτικά, χρησιμοποιήθηκε η γεννήτρια τυχαίων αριθμών του EXCEL που στηρίζεται στην γεννήτρια Hill-Wichmann [8] για την παραγωγή ομοιογενώς κατανεμημένων αριθμών στο διάστημα [0,1], όπως και για την παραγωγή κανονικά κατανεμημένων αριθμών *N(0, 1)* μέσω του μετασχηματισμού Box-Muller [8]. Η γεννήτρια καλείται από την συνάρτηση RANDOMNV(), η οποία είναι μέγιστης σημασίας για την εφαρμογή της προσομοίωσης αφού παράγει τυχαίους αριθμούς που δεν μεταβάλλονται κατά την διάρκεια της προσαρμογής των δεδομένων με το SOLVER.

3) <u>Εφαρμογή των εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων</u>
   Αξιολογήθηκαν οι εκτιμητές των ελαχίστων τετραγώνων (OLS), των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (WLLS) και των μη-γραμμικών σταθμισμένων ελαχίστων

τετραγώνων (WNLLS). Το EXCEL δεν διαθέτει ειδικό «εργαλείο» για τους δύο τελευταίους εκτιμητές και δημιουργήθηκαν τα κατάλληλα υπολογιστικά φύλλα, που συμπεριλαμβάνουν και τον υπολογισμό του πίνακα συνδιακύμανσης, ώστε το SOLVER να «ψάξει» για τις βέλτιστες παραμέτρους του μοντέλου (3), βάσει του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων. Ο κάθε εκτιμητής εφαρμόσθηκε σε 1000 ομάδες παραγόμενων ζευγών τιμών για τον προσδιορισμό των εκτιμήσεων των παραμέτρων $\hat{A}_o$, $\hat{b}$ και $\hat{C}$. Για κριτήριο σύγκλισης $1x10^{-4}$, ο συνολικός χρόνος της προσομοίωσης ήταν περίπου 30 min για τα γραμμικά μοντέλα ενώ για το μη-γραμμικό μοντέλο με παραγώγους υπολογισμένες από κεντρικές διαφορές ήταν περίπου διπλάσιος. Η επαναληπτική εφαρμογή, δηλ. η προσομοίωση, έγινε με το «πρόσθετο» MCSimSolver [9].

4) <u>Απεικόνιση και στατιστική αποτίμηση</u>
Χρησιμοποιήθηκε η Ανάλυση Δεδομένων του EXCEL, και συγκεκριμένα τα «εργαλεία» Ιστόγραμμα και Περιγραφικά Στατιστικά. Η αποτίμηση της ποιότητας των βέλτιστων εκτιμήσεων των παραμέτρων $\hat{A}_o$, $\hat{b}$ και $\hat{C}$ έγινε από τον αριθμητικό μέσο, την τυπική απόκλιση και το εύρος των αντίστοιχων κατανομών. Η πρώτη παράμετρος αποτυπώνει την συμπεριφορά του εκτιμητή καταδεικνύοντας πιθανές μεροληπτικές τάσεις στα αποτελέσματα κατά μέσο όρο. Η δεύτερη αποτυπώνει την μέση απόκλιση των αποτελεσμάτων από τον μέσο και αποτελεί ένδειξη του κατά πόσο ακριβή αναμένεται να είναι μεμονωμένα αποτελέσματα. Τέλος, το εύρος των κατανομών παρέχει μία εκτίμηση των ορίων επίδοσης του εκτιμητή.

5) <u>Επιλογή δείκτη αξιολόγησης επίδοσης εκτιμητών</u>
Ένας πρακτικός δείκτης αξιολόγησης της επίδοσης των μεθόδων εκτίμησης είναι το μέγιστο σφάλμα της δραστικής επιφάνειας, $A(p_i, A_o, b)$, σε ppm μέσω του δείκτη [10]

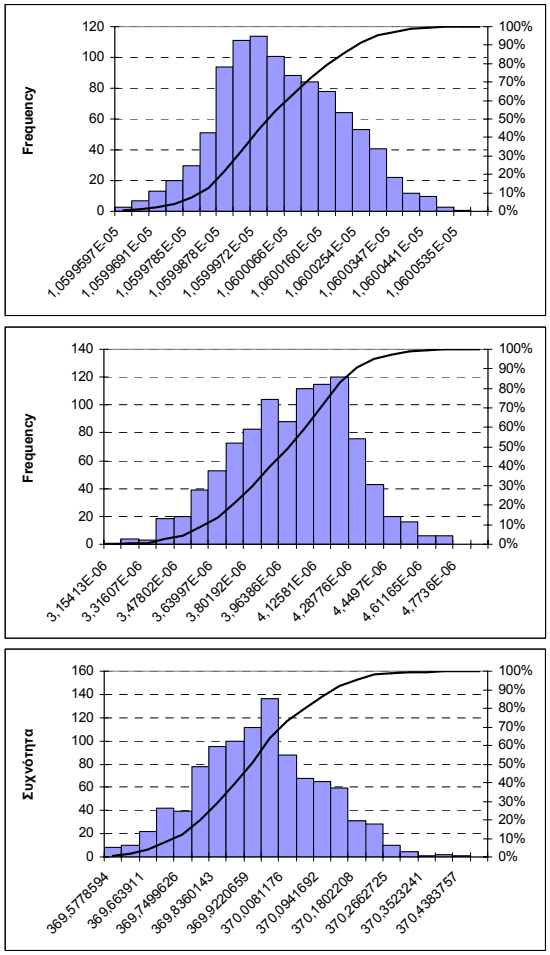
$$\frac{E_A}{A_o} x10^6 = \frac{\max_{p_i}\left|A(A_o, p_i, b) - A(\hat{A}_o, p_i, \hat{b})\right|}{A_o} x10^6 \qquad (5)$$

Πίνακας 1. <u>Παράμετροι ζυγού πίεσης που χρησιμοποιήθηκαν στην προσομοίωση</u>

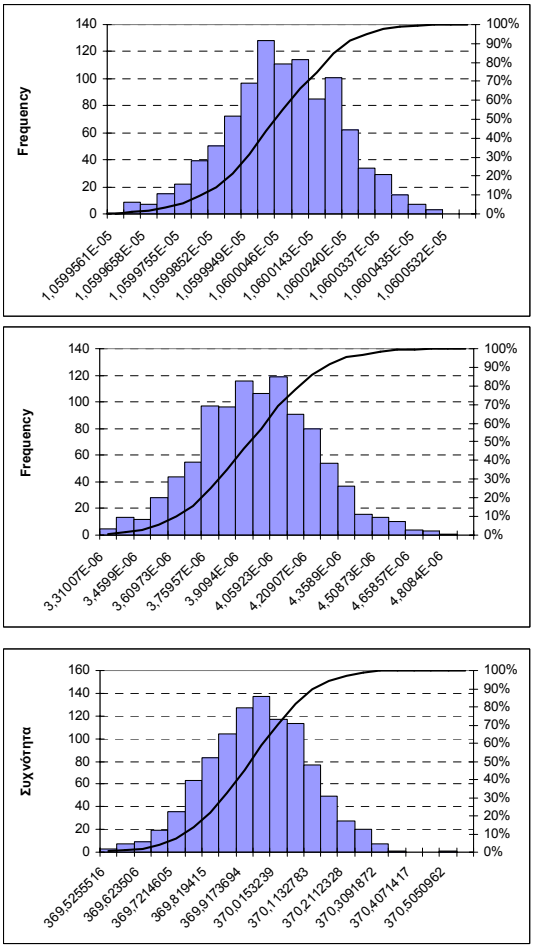
Παράμετρος	Τιμή
A_o (m^2) @ 20^oC	$(10,6 \pm 0,00025)\ x10^{-6}$
b (MPa^{-1})	$(3,93 \pm 0,045\ )\ x10^{-6}$
C (g)	$369,9329 \pm 0,0025$
T (^oC)	$23 \pm 0,003$
α_c (/K)	$(1 \pm 0,05)\ x\ 10^{-5}$
g (m/s^2)	$9,802598 \pm 1\ x\ 10^{-6}$
ρ (kg/m^3)	6600 ± 25
ρ_a (kg/m^3)	$1,187 \pm 0,001$

4. Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Στο σχήμα 1 φαίνονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης βάσει του εκτιμητή WLLS- G I, όπου G I συμβολίζει τυχαία σφάλματα στις μάζες των φορτίων που είναι ανεξάρτητα δείγματα από κανονικές pdf με μηδενικό μέσο και σχετικές τυπικές αποκλίσεις περίπου 10 ppm των «ονομαστικών» τιμών μάζας, αντιστοιχώντας στην τυπική περίπτωση εμφάνισης σφαλμάτων κατά την διακρίβωση ενός ζυγού πίεσης. Η στάθμιση έγινε ώστε να ισχύει η υπόθεση $\mathbf{V(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_{mxn}}$, δηλ. οι παράγοντες στάθμισης ήταν $w_i = 1/\sigma_i^2$. Ποιοτικά, από το σχήμα φαίνεται ότι οι κατανομές των εκτιμώμενων παραμέτρων είναι κανονικές αλλά περιέχουν έναν σημαντικό βαθμό κύρτωσης και ασυμμετρίας. Ο λόγος εμφάνισης αυτών των χαρακτηριστικών οφείλεται αποκλειστικά στον τρόπο εκτίμησης των παραμέτρων από την σχέση (3), δεδομένου ότι οι A_o και b εμφανίζονται ως γινόμενο στον συντελεστή της μεταβλητής p_i^2, προσδίδοντας μία ελαφρά ($b << 1$) μη-γραμμικότητα στο πρόβλημα εκτίμησης. Στο σχήμα 2 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα όταν εφαρμοσθεί ο εκτιμητής WNLLS- G I στα ίδια δεδομένα με τους ίδιους παράγοντες στάθμισης, όπου φαίνεται η ανάκτηση των χαρακτηριστικών συμμετρικής κανονικής κατανομής.



Σχήμα 1. Αποτελέσματα προσομοίωσης παραμέτρων με εκτιμητή WLLS G-I.



Σχήμα 2. Αποτελέσματα προσομοίωσης παραμέτρων με εκτιμητή WNLLS G-I.

Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται οι αντίστοιχοι αριθμητικοί μέσοι των εκτιμώμενων παραμέτρων καθώς και η εκτίμηση της «ποιότητας της προσαρμογής», κατά μέσο όρο, από την ανηγμένη παράμετρο χ_{red}^2, η οποία είναι ίση περίπου με 1 όταν το μοντέλο και οι

στατιστικές υποθέσεις εξηγούν την συνολική διακύμανση των μετρητικών δεδομένων [12]. Οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις καθώς και η αξιολόγηση των εκτιμητών μέσω του δείκτη E_A, παρουσιάζονται στον πίνακα 3. Από την σύγκριση των τιμών προκύπτει ότι η επίδοση του WNLLS είναι οριακά καλύτερη από αυτή του WLLS.

Για να επιβεβαιωθεί ότι αυτοί οι εκτιμητές όντως παράγουν βέλτιστα αποτελέσματα, με την έννοια της αμεροληψίας και ελάχιστης διακύμανσης, στους ίδιους πίνακες παρουσιάζονται οι μέσοι, τυπικές αποκλίσεις και δείκτες E_A όπως προκύπτουν από την εφαρμογή του εκτιμητή OLS στα ίδια δεδομένα, απ'οπου προκύπτει ότι αφενός η επίδοση του εκτιμητή είναι σαφώς υποβαθμισμένη σε σχέση με τους δύο προηγούμενους και αφετέρου δεν μπορεί να εξαχθεί η «ποιότητα της προσαρμογής» σε αυτή την περίπτωση δεδομένου ότι δεν υπάρχει προγενέστερη πληροφορία για την διακύμανση των μετρήσεων.

Εκτός από την τυπική περίπτωση εμφάνισης σφαλμάτων κατά την διακρίβωση ζυγών πίεσης που περιγράφεται παραπάνω, υπάρχουν δύο ακόμη περιπτώσεις που μπορούν να παρατηρηθούν πειραματικά. Η πρώτη αφορά στην εμφάνιση μιας «νεκρής ζώνης» (dead-band) στην απόκριση μετρητών νεκρού φορτίου κυρίως, κάτι αντίστοιχο με την περιορισμένη διακριτική ικανότητα ενός οργάνου λόγω κατασκευαστικών ανοχών. Σε αυτή την περίπτωση συνήθως το σφάλμα θεωρείται σταθερό, αλλά λόγω της δυναμικής φύσης της μέτρησης (ροή ρευστού στο διάκενο του PCA) και των μεταβαλλόμενων ιδιοτήτων του μέσου εργασίας (ιξώδες, αδιαβατικές μεταβολές πυκνότητας κλπ.) θα μπορούσε να υποτεθεί εξάρτηση από την πίεση ώστε το εύρος της να μεταβάλλεται ανάλογα με την μάζα του αντίστοιχου φορτίου.

Για να προσομοιωθεί αυτή η πειραματική παρατήρηση υποτέθηκαν ανεξάρτητα τυχαία σφάλματα στις μάζες των φορτίων που αποτελούν δείγματα από ορθογωνικές κατανομές με μηδενικό μέσο και σχετικές τυπικές αποκλίσεις περίπου 10 ppm των «ονομαστικών» τιμών μάζας η δε στάθμιση έγινε με παράγοντες στάθμισης $w_i = 1/\sigma_i^2$. Τα αποτελέσματα εφαρμογής του εκτιμητή WLLS-UNI φαίνονται στους πίνακες 2 και 3 και ουσιαστικά δεν διαφέρουν σημαντικά από την περίπτωση ης κανονικής κατανομής των σφαλμάτων μέτρησης που ήδη εξετάστηκε.

Μία άλλη περίπτωση σφάλματος που μπορεί να εμφανιστεί κατά την διακρίβωση σχετίζεται με την περιστροφή του εμβόλου όταν το σύστημα ισορροπεί λόγω της άσκησης της πίεσης αναφοράς και της πίεσης που παράγεται από το νεκρό φορτίο. Η περιστροφή του εμβόλου είναι σημαντική δεδομένου ότι ελαχιστοποιεί την επίδραση τριβών μεταξύ ρευστού μέσου και εμβόλου. Έτσι η κατάλληλη χρονική περίοδος για την μέτρηση είναι όταν το σύστημα περιστρέφεται με σχετικά σταθερή γωνιακή ταχύτητα Η διάρκεια της σταθερής περιστροφής εξαρτάται την ροπή επιβράδυνσης και κατ'επέκταση από την ροπή αδράνειας του συστήματος, η οποία αυξάνει συναρτήσει του φορτίου. Αποτέλεσμα του παραπάνω είναι να υπάρξουν σειρές μετρήσεων των οποίων τα σφάλματα είναι αντιστρόφως ανάλογα της πίεσης ή αντίστοιχα της μάζας του φορτίου. Το βασικό πρόβλημα που μπορεί να ανακύψει σε αυτή την περίπτωση, όσον αφορά την εκτίμηση των παραμέτρων, είναι να μην χρησιμοποιηθούν οι κατάλληλοι παράγοντες στάθμισης στον εκτιμητή WLLS. Για την ανάδειξη αυτής της επιπλοκής προσομοιώθηκαν πειραματικά αποτελέσματα, τα σφάλματα των οποίων αποτελούν δείγματα από κανονικές κατανομές με μηδενικό μέσο και τυπικές αποκλίσεις ανάλογες του $1/M_i$, δηλ. των «ονομαστικών» τιμών μάζας. Η στάθμιση έγινε με παράγοντες στάθμισης $w_i = 1/\sigma_i^2$. όπου θεωρήθηκε ότι η τυπική απόκλιση εξακολουθεί να είναι 10 ppm της μάζας του φορτίου. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης WLLS- G II φαίνονται στον πίνακα 2. Αν και δεν φαίνεται να υπάρχει σημαντική μεροληψία στην εκτίμηση των παραμέτρων εντούτοις όλοι οι δείκτες ποιότητας που παρουσιάζονται στον πίνακα 3 όπως και το χ_{red}^2 είναι κατώτεροι από την αντίστοιχη περίπτωση με την σωστή στάθμιση (WLLS- G I).

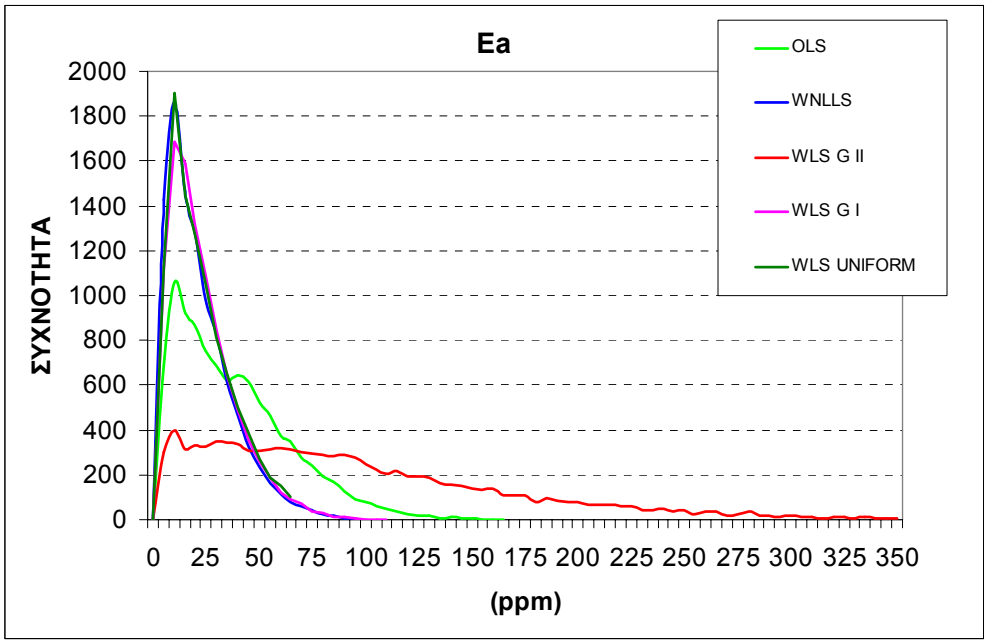
Πίνακας 2 Αριθμητικοί μέσοι των κατανομών των παραμέτρων A_o, b και C που προέκυψαν από την εφαρμογή των αντίστοιχων εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων κατά την προσομοίωση. Η τελευταία στήλη αφορά στην «ποιότητα προσαρμογής» του μοντέλου.

Εκτιμητής	A_o x10^6 (m^2)	b x10^6 (MPa^{-1})	C (g)	χ_{red}^2
WLLS –G I	10,6000242	3,9511	369,9210 1	1,06
WNLLS-G I	10,6000130	3,9362	369,9321 2	1,06
OLS	10,5999584	4,0126	369,8323 7	--
WLLS- UNI	10,6000083	3,9613	369,9155 9	1,03
WLLS- G II	10,6000360	3,9220	369,9544 3	4,85

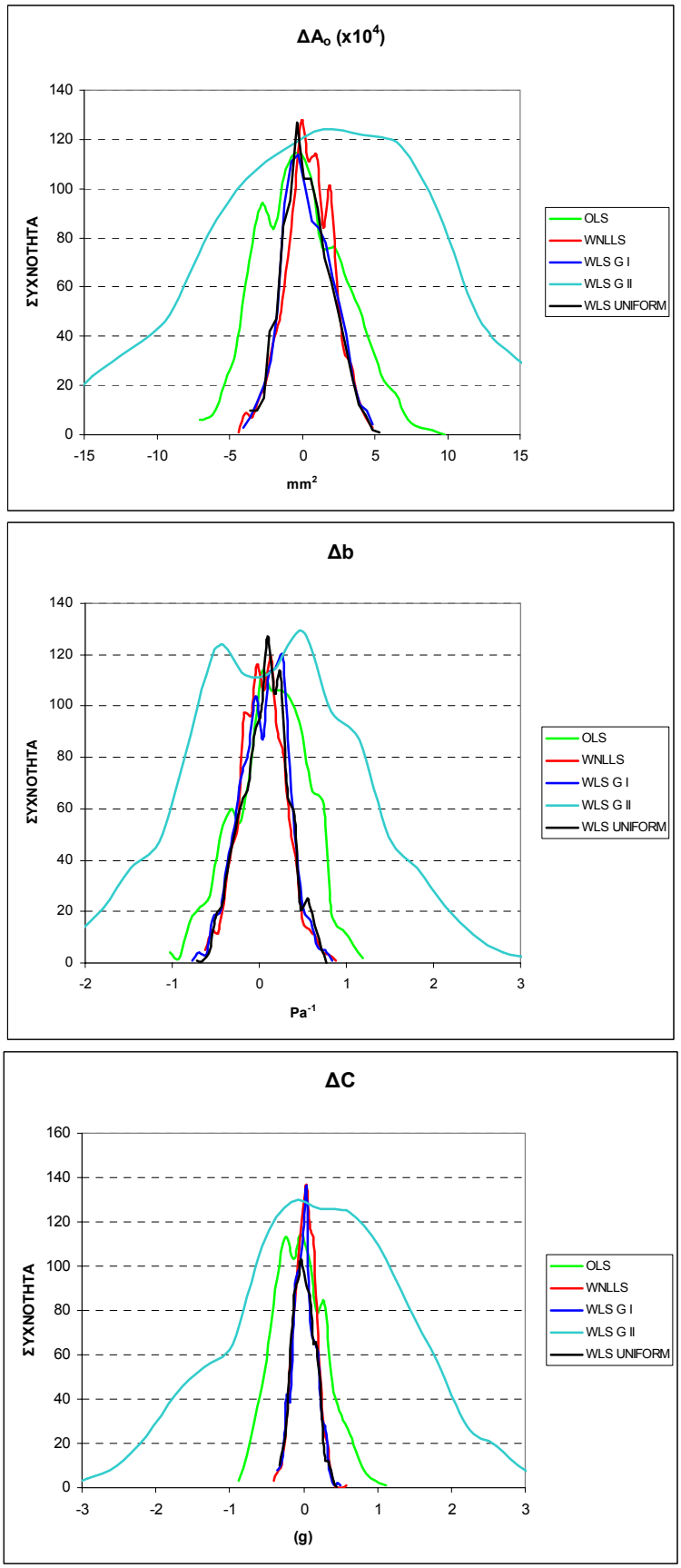
Πίνακας 3. Τυπικές αποκλίσεις των κατανομών των παραμέτρων A_o, b και C που προέκυψαν από την εφαρμογή των αντίστοιχων εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων κατά την προσομοίωση και η μέγιστη και μέση τιμή του δείκτη επίδοσης των εκτιμητών.

Εκτιμητής	σ(A_o) x10^6 (m^2)	σ(b) x10^6 (MPa^{-1})	σ(C) (mg)	E_A(max)	E_A (mean)
WLLS -G I	0,000005 3	0,0086	4,7	1,06 x 10^{-4}	2,1 x 10^{-5}
WNLLS-G I	0,000005 1	0,0081	4,6	9,4 x 10^{-5}	2,0 x 10^{-5}
OLS	0,000009 4	0,013	11	1,62 x 10^{-4}	3,6 x 10^{-5}
WLLS- UNI	0,000005 2	0,0083	4,7	1,05 x 10^{-4}	2,1 x 10^{-5}
WLLS- G II	0,00002 6	0,033	38	5,02 x 10^{-4}	9,4 x 10^{-5}

Τέλος, στο σχήμα 3 φαίνονται οι κατανομές του δείκτη E_A για τις διάφορες περιπτώσεις εκτιμητών και υποθέσεων για τα σφάλματα στις μάζες των φορτίων ενώ στο σχήμα 4 παρουσιάζεται το εύρος των αποκλίσεων των εκτιμήσεων των παραμέτρων A_o, b και C από τις αρχικές τιμές του πίνακα 1.



Σχήμα 3. Κατανομές του δείκτη E_A για τους διάφορους εκτιμητές που αξιολογήθηκαν ως προς την επίδοσή τους.



Σχήμα 4. Εύρος αποκλίσεων εκτιμήσεων παραμέτρων $\widehat{A}_o$, $\widehat{b}$ και $\widehat{C}$ από τις αρχικές παραμέτρους A_o, b και C που χρησιμοποιήθηκαν για την προομοίωση (πίνακας 1).

5. Συμπεράσματα

Δεδομένου ότι η αποτίμηση των μετρητικών αποτελεσμάτων αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διακρίβωσης ενός ζυγού πίεσης, η επιλογή του κατάλληλου ως προς την επίδοση εκτιμητή, μπορεί να έχει σοβαρές συνέπειες στην διατήρηση της ιχνηλασιμότητας σε σχέση με πρωτεύοντα πρότυπα πίεσης. Η επιλογή αυτή πρέπει να λαμβάνει υπόψη τα χαρακτηριστικά των δεδομένων τα οποία πιθανά να μην είναι προφανή. Από τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν προκύπτει ότι η επίδοση του εκτιμητή των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων είναι βέλτιστη με την προϋπόθεση της ορθής χρήσης παραγόντων στάθμισης. Αντίθετα αν η στάθμιση δεν είναι η κατάλληλη το σχετικό σφάλμα της δραστικής επιφάνειας που προκύπτει από την εφαρμογή του εκτιμητή μπορεί να κατά μέσο όρο 5 φορές μεγαλύτερο. Επιπλέον, το είδος της κατανομής των σφαλμάτων δεν φαίνεται να επιδρά στην επίδοση του εκτιμητή αν η στάθμιση έχει γίνει σωστά. Τέλος, το υπολογιστικό φύλλο EXCEL μπορεί επιτυχώς να μετατραπεί σε ένα σύνθετο εργαλείο ανάλυσης μετρήσεων με αρκετή ευκολία.

6. Βιβλιογραφία

1. R.S. Dadson, S.L. Lewis and G.N. Peggs, "*The Pressure Balance: Theory and Practice*", London HMSO, 1982.
2. D.I. Simpson, "Computerized techniques for calibrating pressure balances", Metrologia **30**, 1994, 655-658.
3. C.M. Sutton, M.P. Fitzgerald and W. Giardini, "A method of analysis for cross-floats between pressure balances", Metrologia **42**, 2005, S212-S215.
4. C.P. Robert and G. Casella, "*Monte Carlo Statistical Methods*", 2nd ed. Springer , New York, 2004.
5. R.J. Barlow, *"Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences"*, Wiley 1989.
6. D. Fylstra, L. Lasdon, J. Watson and A. Warren, "Design and use of the Microsoft Excel Solver", Interfaces **28**, 1998, 29-55.
7. ISO "*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements"* 2nd. ed., Geneva 1995.
8. M.G. Cox, M.P. Dainton and P.M. Harris, "Software Specifications for Uncertainty Calculation and Associated Statistical Analysis", NPL Report CMSC 10/01, 2001.
9. H. Barreto and F.M. Howland, www.wabash.edu/econometrics.
10. A.B. Forbes and P.M. Harris, "Estimation algorithms in the calculation of effective area of pressure balances", Metrologia **36**, 1999, 689-692.