# ΠΑΡΑΘΥΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ MONTE-CARLO

**Ν. ΣΚΟΥΛΙΔΗΣ [+], Χ. ΜΗΤΣΑΣ*, Χ. ΠΟΛΑΤΟΓΛΟΥ[+]**
**[+]ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ, Α.Π.Θ., 54006**
*** Δ/ΝΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ, Ε.Ι.Μ., ΘΕΣ/ΝΙΚΗ 57022**
**Email: hariton@auth.gr**

*Στην παρούσα εργασία σχεδιάζεται μια παραθυρική εφαρμογή για την εκτίμηση της μετρητικής αβεβαιότητας με την μέθοδο Monte-Carlo. Η εφαρμογή, αν και είναι αρκετά γενική και μπορεί να περιλάβει διάφορες περιπτώσεις μέτρησης φυσικο-χημικών μεγεθών, χρησιμοποιείται στην περίπτωση του προσδιορισμού μάζας με μεγάλη ακρίβεια (συγκριτική ζύγιση) ως ένα παράδειγμα εργασίας. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την μέθοδο συγκρίνονται με αυτά από την εφαρμογή της κλασσικής διάδοσης των αβεβαιοτήτων και δείχνουν ότι για τη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει ταύτιση.*

## 1. Εισαγωγή

Το ISO “GUM” [1] παρέχει ένα συστηματικό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος προσδιορισμού της εκτίμησης y, της τυπικής αβεβαιότητας u(y) και ενός διαστήματος εμπιστοσύνης I(p) για ένα μετρούμενο μέγεθος Y που προκύπτει από τις μετρήσεις ή εκτιμήσεις, $x_i$, άλλων μεγεθών $X_i$ μέσω ενός μετρητικού μοντέλου $Y = Q(X_i, i=1…n)$. Η μεθοδολογία αυτή αποτελεί πλέον τον συνήθη και διεθνώς αναγνωρισμένο τρόπο εκτίμησης της αβεβαιότητας μιας μετρητικής διεργασίας και έχει υιοθετηθεί και εφαρμοσθεί σε πολλά πρότυπα και οδηγίες όπου υπάρχει ανάγκη εκτίμησής της [2,3].

Κεντρικό σημείο της μεθοδολογίας του ISO “GUM” είναι η χρήση ενός γραμμικοποιημένου μοντέλου του νόμου διάδοσης των αβεβαιοτήτων (ΝΔΑ) [4] όπου οι εκτιμήσεις των μεταβλητών εισόδου του μοντέλου, $x_i$, και των αβεβαιοτήτων τους, $u(x_i)$, προέρχονται από τις αναμενόμενες τιμές και τυπικές αποκλίσεις των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανοτήτων (pdf) των αντίστοιχων τυχαίων μεταβλητών $X_i$, με αποτέλεσμα τα ζητούμενα εξαγόμενα μεγέθη y, u(y) και του διαστήματος εμπιστοσύνης βάσει της κατανομής t-Student για συγκεκριμένο αριθμό «δραστικών βαθμών ελευθερίας», $\nu_{eff}$, όπως προκύπτουν από την σχέση Welch-Satterthwaite [5].

Ακόμη από την πρώτη έκδοση του ISO “GUM” αναγνωρίσθηκε ότι παρόλο που σε πλείστες περιπτώσεις η παραπάνω μεθοδολογία δίνει ικανοποιητικές και αξιόπιστες εκτιμήσεις της μετρητικής αβεβαιότητας, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η εφαρμογή της είτε την υποεκτιμά σημαντικά ή δίνει διαστήματα εμπιστοσύνης που είναι μεγαλύτερα σε σχέση με το αναφερόμενο επίπεδο εμπιστοσύνης. Για τον παραπάνω λόγο υπάρχει μία δήλωση στο “GUM” όπου γίνεται νύξη για χρήση και άλλων, υπολογιστικών, μεθόδων για την εκτίμηση της αξιοπιστίας του μετρητικού αποτελέσματος όπου αυτό κρίνεται σκόπιμο και ιδιαίτερα όταν:

1. υπάρχει σημαντική μη-γραμμικότητα στο μετρητικό μοντέλο ώστε το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης του, να μην αποτελεί καλή προσέγγιση
2. δεν ισχύει το θεώρημα του κεντρικού ορίου με αποτέλεσμα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων της μεταβλητής εξόδου να μην είναι κανονική κατανομή
3. δεν υπάρχει ικανοποιητική ισχύς της σχέσης Welch-Satterthwaite για τον υπολογισμό των «δραστικών βαθμών ελευθερίας»
4. υπάρχει αμφιβολία ισχύος των προϋποθέσεων για την εφαρμογή του νόμου διάδοσης των αβεβαιοτήτων

Δεδομένων των παραπάνω πιθανών «μειονεκτημάτων» της μεθοδολογίας [5], συνιστάται πλέον και η χρήση της υπολογιστικής μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo (MC) για την εκτίμηση των χαρακτηριστικών της συνάρτησης πυκνότητας πιθανοτήτων του προσδιοριζόμενου μεγέθους Y [6]. Σε αντίθεση με τον νόμο διάδοσης των αβεβαιοτήτων, η μέθοδος αυτή προβλέπει την διάδοση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανοτήτων των μεταβλητών του μετρητικού μοντέλου και τον προσδιορισμό της αναμενόμενης τιμής, της τυπικής απόκλισης και ενός διαστήματος εμπιστοσύνης από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων της μεταβλητής Y.

## 2. Νόμος Διάδοσης των Αβεβαιοτήτων

Όταν η μέτρηση ενός μεγέθους, Y, δεν είναι άμεσα εφικτή αλλά εξαρτάται από την μέτρηση n άλλων μεγεθών $X_1,X_2, \ldots,X_n$, ισχύει η μαθηματική σχέση $Y = Q(X_1,X_2\ldots X_n)$. Έστω ότι $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι οι εκτιμήσεις των μεγεθών $X_1,X_2\ldots X_n$ αντίστοιχα, που προκύπτουν από την μέτρησή τους. Συνέπεια της μέτρησης είναι οι εκτιμήσεις αυτές να εμπεριέχουν τυχαία σφάλματα και τα οποία είναι λογικό να υποτεθεί ότι θα διαδοθούν με κάποιο τρόπο στην εκτίμηση q, του μεγέθους Y. Ξεκινώντας από το γεγονός ότι τα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι «λογικές» εκτιμήσεις των μεγεθών $X_1,X_2, \ldots,X_n$, το Q μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα ανάπτυγμα Taylor $1^{ης}$ τάξης γύρω από τις εκτιμήσεις ως

$$Q(X_1,\ldots,X_n) \approx Q(x_1,\ldots,x_n) + \frac{\partial Q}{\partial X_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial X_n}(X_n - x_n) \qquad (1)$$

όπου οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες στα $X_i = x_i$ $(i = 1\ldots n)$. Εφόσον τα $X_1,X_2\ldots X_n$ είναι τυχαίες μεταβλητές έπεται ότι και το Q είναι τυχαία μεταβλητή με πιθανότερη τιμή $E\{Q\} = Q(x_1,\ldots x_n)$. Επομένως

$$(Q(X_1,\ldots,X_n) - Q(x_1,\ldots,x_n))^2 = (Q - E(Q))^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial X_n}(X_n - x_n)\right)^2 \qquad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι για μία τυχαία μεταβλητή z, η αναμενόμενη τιμή E(z) και η διακύμανση Var(z) ορίζονται αντίστοιχα ως

$$E(z) = \int_{\infty}^{\infty} z f(z) dz$$

$$Var(z) = E\{(z - E(z))^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (z - E(z))^2 f(z) dz = E(z^2) - E^2(z)$$

όπου f(z) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων (pdf) που αντιστοιχεί στην μεταβλητή, προκύπτει ότι

$$E(Q - E(Q))^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}\right)^2 E(X_1 - x_1)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial Q}{\partial X_n}\right)^2 E(X_n - x_n)^2 + \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial X_j} E(X_i - x_i)E(X_j - x_j)$$

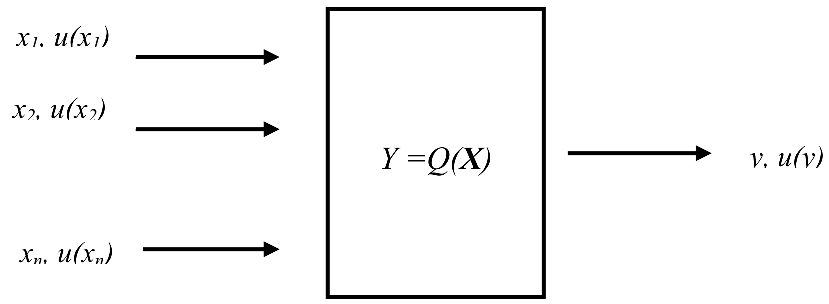
ή αντικαθιστώντας για τις πιθανότερες τιμές των τετραγωνικών αποκλίσεων

$$Var(Q) = \left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}\right)^2 Var(X_1) + \ldots + \left(\frac{\partial Q}{\partial X_n}\right)^2 Var(X_2) + \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial X_j} Cov(X_i, X_j) \qquad (3)$$

Αν για τις διακυμάνσεις και συν-διακυμάνσεις χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες αβεβαιότητες που συνοδεύουν τις πειραματικά προσδιορισμένες εκτιμήσεις η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$u^2(q) = \left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}\right)^2 u^2(x_1) + \ldots + \left(\frac{\partial Q}{\partial X_n}\right)^2 u^2(x_n) + \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial X_j} u(x_i, x_j) \qquad (4)$$

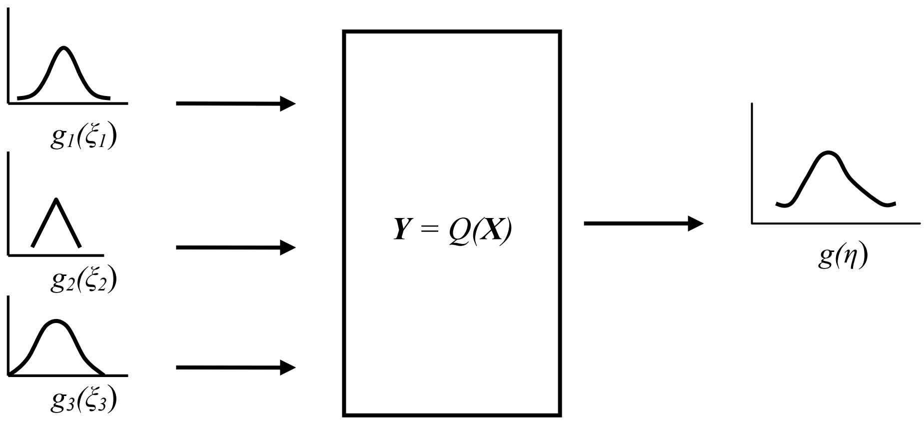
και αποτελεί τον νόμο διάδοσης των αβεβαιοτήτων. Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 1.




Σχήμα 1. Αναπαράσταση του υπολογισμού αβεβαιότητας με χρήση του νόμου διάδοσης των αβεβαιοτήτων (ΝΔΑ).

## 3. Αριθμητική Προσομοίωση-Μέθοδος Monte Carlo

Η προσομοίωση Monte Carlo για τον υπολογισμό αβεβαιοτήτων στηρίζεται στο ότι οποιαδήποτε τιμή που προκύπτει για μία μεταβλητή από μία κατανομή τυχαίων πιθανών εκτιμήσεών της, είναι το ίδιο επιτρεπτή όσο οποιαδήποτε άλλη εκτίμησή της. Επομένως παίρνοντας για κάθε μεταβλητή εισόδου, $X_i$, μία τυχαία τιμή από την αντίστοιχη προκαθορισμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων παράγεται μία συγκεκριμένη, τυχαία αλλά καθ'όλα επιτρεπτή κατάσταση εισόδου για το μετρητικό μοντέλο. Η τιμή που υπολογίζεται από το μοντέλο αποτελεί μία πιθανή εκτίμηση της μεταβλητής, Y, που προσδιορίζεται μέσω του μετρητικού μοντέλου. Η επανάληψη της διαδικασίας αυτής M φορές ($M \approx 10^5$) παράγει μία προσέγγιση της κατανομής των πιθανών εκτιμήσεων της μεταβλητής Y. Στο σχήμα 2 οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανοτήτων των μεταβλητών $X_1$, $X_2$, $X_3$ είναι αντίστοιχα οι $g_i(\xi_i)$, i=1…3, ενώ της μεταβλητής Y, g(η).




Σχήμα 2. Αναπαράσταση του υπολογισμού αβεβαιότητας από την διάδοση κατανομών και χρήση προσομοίωσης Monte-Carlo (MC).

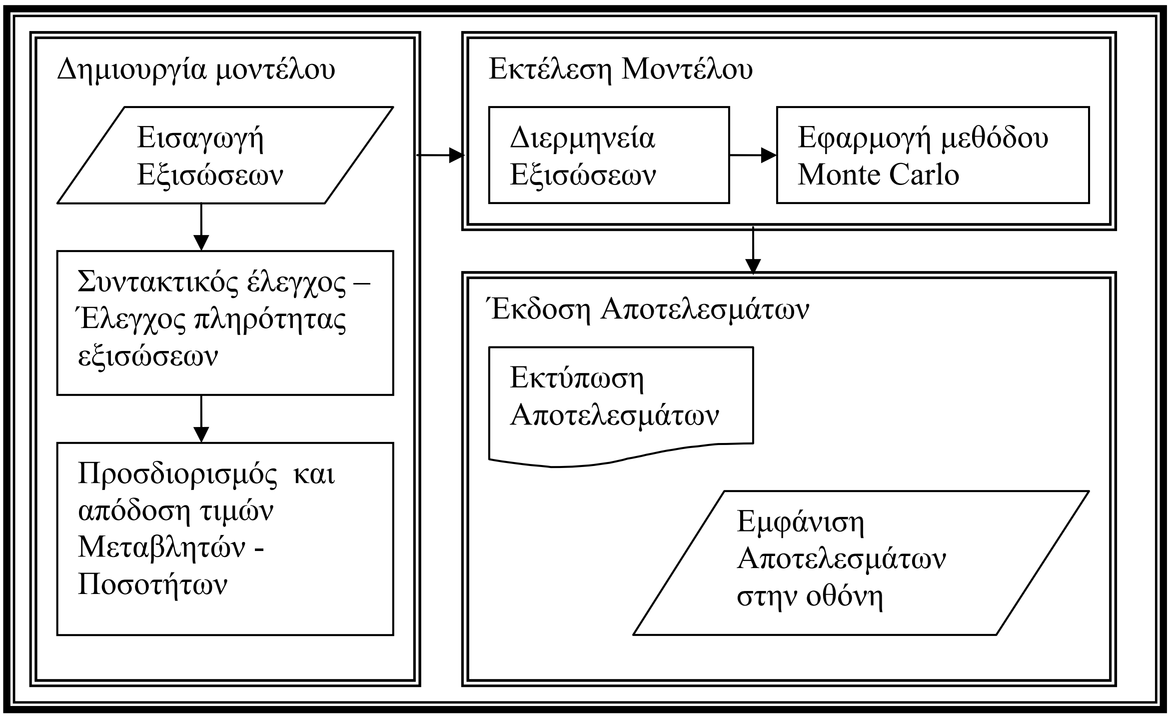
Τα βήματα που ακολουθεί κανείς για παραγωγή της προσέγγισης της κατανομής των εκτιμήσεων της μεταβλητής Y συνοψίζονται παρακάτω:

1. δειγματοληψία από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανοτήτων των N μεταβλητών $X_i$ για την παραγωγή ενός δείγματος μεγέθους N. Ο βαθμός τυχαιότητας όσο και η ανεξαρτησία των στοιχείων του δείγματος εξαρτάται από την γεννήτρια τυχαίων αριθμών που θα χρησιμοποιηθεί [7].

2. υπολογισμός της εκτίμησης της μεταβλητής Y βάσει του μετρητικού μοντέλου για το δείγμα των N μεταβλητών $X_i$.
3. επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας M φορές, με αποτέλεσμα την παραγωγή M ανεξάρτητων εκτιμήσεων της μεταβλητής Y από τα M δείγματα μεγέθους N των εκτιμήσεων των μεταβλητών $X_i$. O αριθμός των επαναλήψεων δεν επιλέγεται συνήθως a priori αλλά με κάποια μέθοδο που επιτρέπει την προσαρμογή του M κατά την διάρκεια της προσομοίωσης, δεδομένου ότι ο αριθμός των δοκιμών εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανοτήτων του εξαγόμενου μεγέθους.
Δ) παραγωγή της συγκεντρωτικής συνάρτησης κατανομής (cdf) του εξαγόμενου μεγέθους Y, και από γίνεται ο υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής και τυπικής απόκλισής της καθώς και του διαστήματος εμπιστοσύνης.

**3. Περιγραφή του λογισμικού Προσομοίωσης Monte Carlo**

Για την πραγματοποίηση της εφαρμογής αυτής χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον ανάπτυξης εφαρμογών Visual Studio .Net της Microsoft. Η ανάπτυξη έγινε σε γλώσσα C#, και μπορεί να εκτελείται σε στο περιβάλλον των Windows, όπως και κάθε άλλη παραθυρική εφαρμογή. Στην εικόνα 1 φαίνεται μια διαγραμματική περιγραφή των λειτουργικών τμημάτων της εφαρμογής. Γενικά χωρίζεται σε τρία τμήματα που περιγράφονται παρακάτω αναλυτικότερα.

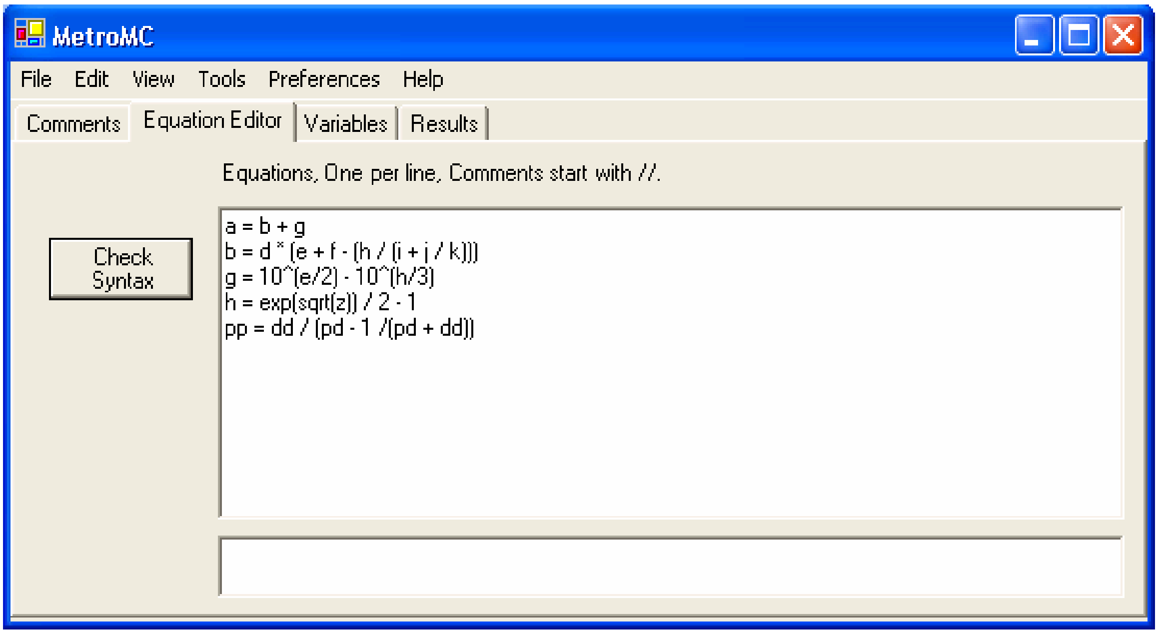



Εικόνα 1. Διάγραμμα λειτουργίας.

*3.1 Δημιουργία μοντέλου*

Εδώ αρχικά εισάγονται σε ένα πλαίσιο κειμένου (σχήμα 3) οι εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί. Η εισαγωγή μπορεί να γίνει είτε απ' ευθείας είτε από αρχείο κειμένου (.txt) ή από αρχείο που δημιουργήθηκε από την ίδια την εφαρμογή. Η σύνταξη είναι απλή και ακολουθεί τους κανόνες γραφής εξισώσεων. Οι μαθηματικές συναρτήσεις που στην παρούσα έκδοση δέχεται το λογισμικό είναι αυτές που χρησιμοποιούνται συνήθως, δηλαδή εκτός από τις τέσσερις βασικές

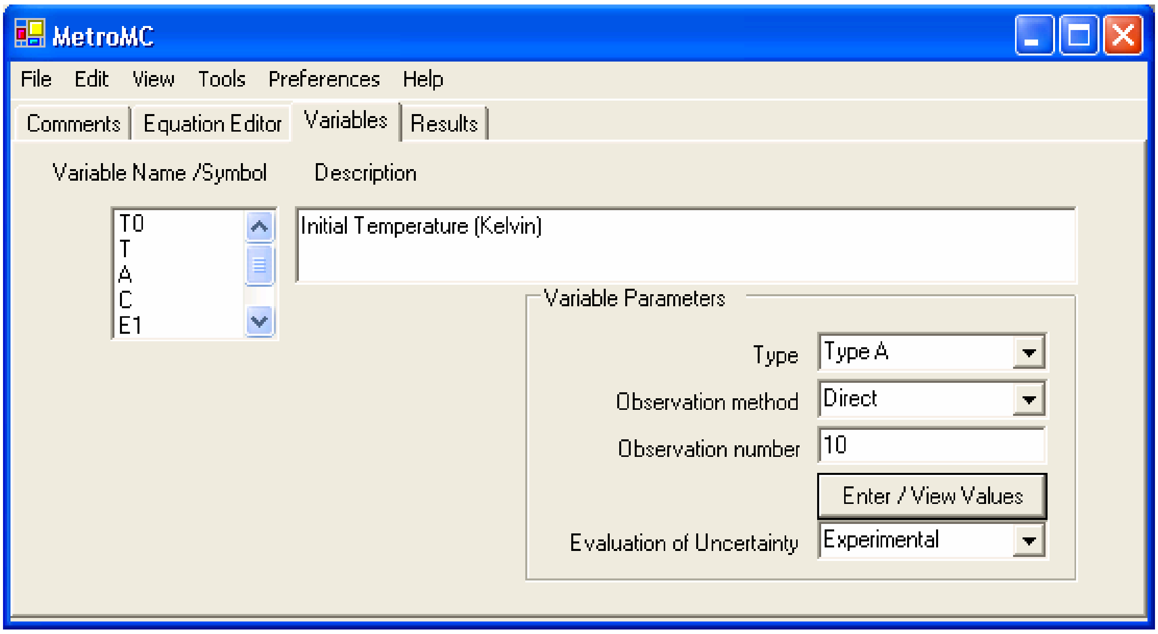
αριθμητικές πράξεις (+, -, *, /), υποστηρίζονται και οι εξής: Ύψωση σε δύναμη (^), φυσικοί λογάριθμοι (LN) και δεκαδικοί (LOG)), η εκθετική συνάρτηση (EXP), τετραγωνική ρίζα (SQRT). Για λόγους αναβάθμισης έχουν δεσμευθεί λέξεις που χρησιμοποιούνται για άλλες μαθηματικές συναρτήσεις, όπως οι τριγωνομετρικές (SIN, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN), οι υπερβολικές (SINH, COSH, TANH, ASINH, ACOSH, ATANH) και άλλες (INV, LOOP, WHILE, FOR, UNTIL). Πάντως σε κάθε περίπτωση αναβάθμισης του λογισμικού προβλέπεται να υπάρχουν και εργαλεία για τον έλεγχο των υπαρχόντων μοντέλων και την μετατροπή τους σε συμβατά με τη νέα έκδοση του λογισμικού. Τα αναγνωριστικά των μεταβλητών μπορούν να περιλαμβάνουν γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και αριθμούς αλλά να αρχίζουν οπωσδήποτε με λατινικό γράμμα. Το συνολικό μήκος των αναγνωριστικών δεν πρέπει να ξεπερνά τους 16 χαρακτήρες. Όλες οι μεταβλητές ή σταθερές που χρησιμοποιούνται είναι πραγματικοί αριθμοί διπλής ακρίβειας στην περιοχή $\pm 5.0 * 10^{-324}$ έως $\pm 1.7 * 10^{308}$ με ακρίβεια 15 τουλάχιστον ψηφίων. Σχόλια μπορούν να εισαχθούν χρησιμοποιώντας τους χαρακτήρες «//» σαν διακριτικό είτε στην αρχή μιας γραμμής, οπότε αυτή η γραμμή αγνοείται, ή μετά τη γραφή της εξίσωσης, οπότε ότι ακολουθεί αγνοείται επίσης. Οι κενές γραμμές αγνοούνται. Υπάρχει η δυνατότητα επιλογής για το αν στα σύμβολα των μεταβλητών θα διαφοροποιούνται τα πεζά από τα κεφαλαία γράμματα ή όχι. Στην περίπτωση διαφοροποίησης πεζών – κεφαλαίων, οι υποστηριζόμενες συναρτήσεις αναγνωρίζονται με κεφαλαία γράμματα. Αυτή η δυνατότητα δίνεται για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα πεζά σαν δείκτες, καθόσον δεν υποστηρίζονται δείκτες στη γραφή των μεταβλητών.
Επιτρέπεται η χρήση παρενθέσεων μέχρι 10 επιπέδων.




Σχήμα 3. Εισαγωγή εξισώσεων

Μετά την εισαγωγή των εξισώσεων ακολουθεί συντακτικός έλεγχος. Εδώ ελέγχονται οι υποστηριζόμενες συναρτήσεις και η σύνταξή τους, η ύπαρξη και η πληρότητα των παρενθέσεων, η ύπαρξη αριστερού και δεξιού μέλους των εξισώσεων κλπ. Συγχρόνως ελέγχεται και η πληρότητα των εξισώσεων. Η σειρά ελέγχου είναι από την τελευταία προς την πρώτη, έτσι ώστε η πρώτη εξίσωση να έχει σαν αριστερό μέλος την μεταβλητή της οποίας ψάχνουμε την αβεβαιότητα. Σαν πληρότητα εννοείται ότι για κάθε εξίσωση που ελέγχεται θα πρέπει να είναι γνωστές όλες οι μεταβλητές του δεξιού μέλους. Δηλαδή αν είναι ενδιάμεσα αποτελέσματα θα πρέπει να έχει προηγηθεί η εξίσωση ορισμού τους. Σε κάθε περίπτωση που διαγιγνώσκεται είτε συντακτικό λάθος είτε μη πληρότητα εξισώσεων είτε μη αποδεκτό αναγνωριστικό μεταβλητής δίνεται μήνυμα λάθους και αναστέλλεται η δυνατότητα προόδου της εφαρμογής.

Ακολουθεί ο προσδιορισμός των μεταβλητών. Εδώ, αν μεν πρόκειται για εξισώσεις που έχουν εισαχθεί από αρχείο της εφαρμογής, ελέγχεται αν οι μη προσδιοριζόμενες μεταβλητές είναι ήδη χαρακτηρισμένες σαν σταθερές ή σαν ανεξάρτητες. Αν πρόκειται για εξισώσεις που έχουν εισαχθεί από αρχείο κειμένου ή απ' ευθείας, βρίσκονται οι μη προσδιοριζόμενες μεταβλητές και χαρακτηρίζονται σαν ανεξάρτητες (τύπου Α), οπότε και θα πρέπει να τους δοθούν τιμές ή να αλλαχθεί ο χαρακτηρισμός τους από τον χρήστη. Κάθε μεταβλητή μπορεί να χαρακτηρισθεί σαν ενδιάμεσο αποτέλεσμα, σταθερή (πχ κάποιος συντελεστής, ο αριθμός $\pi$ κλπ), Τύπου Α οπότε θα πρέπει να εισαχθούν στην εφαρμογή και οι τιμές που έχουν μετρηθεί, Τύπου Β. Για τις μεταβλητές τύπου Β θα πρέπει να ορισθεί το είδος της κατανομής τους και τα χαρακτηριστικά της κατανομής, πχ κανονική (Gaussian – normal), η διευρυμένη αβεβαιότητα (expanded uncertainty) και συντελεστής κάλυψης (coverage factor). Οι υποστηριζόμενες κατανομές στην παρούσα έκδοση είναι η κανονική και η ορθογωνική. Στο σχήμα 4 φαίνεται η φόρμα ορισμού μεταβλητών.




Σχήμα 4. Ορισμός μεταβλητών.

### *3.2 Εκτέλεση μοντέλου*

Για την εκτέλεση του μοντέλου απαιτείται η διερμηνεία των δοσμένων παραστάσεων εξισώσεων. Η σειρά εκτέλεσης των πράξεων γίνεται με προτεραιότητα στις παρενθέσεις και ακολουθούν οι ενσωματωμένες συναρτήσεις, οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις και τέλος οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις, και από δεξιά προς τα αριστερά.
Στις μεταβλητές τύπου Β δίνονται τιμές μέσα στην κατανομή που τους έχει ορισθεί από ενσωματωμένες γεννήτριες τυχαίων αριθμών.

### *3.3 Έκδοση αποτελεσμάτων*

Μετά την εκτέλεση του μοντέλου τα αποτελέσματα μπορούμε να εκτυπώσουμε ή να τα δούμε στην οθόνη. Τα αποτελέσματα που εκτυπώνονται είναι για κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται στις δοσμένες εξισώσεις η τιμή της, η τυπική αβεβαιότητά της, οι βαθμοί ελευθερίας (όπου ορίζονται), ο συντελεστής ευαισθησίας, η συμμετοχή της στην αβεβαιότητα και ο συντελεστής συσχέτισης.

## 4. Σύγκριση Μεθόδων στην Διακρίβωση Μάζας

Για την μέτρηση της μάζας ενός πρότυπου βάρους χρησιμοποιείται η μέθοδος της συγκριτικής ζύγισης με αντικατάσταση (substitution weighing), ήτοι ζυγίζονται κατά σειρά το πρότυπο αναφοράς (r) και το πρότυπο δοκιμής (t) με ακολουθίες ζύγισης rttr (διπλή αντικατάσταση) ή rtr (απλή αντικατάσταση) ώστε να αναιρείται η γραμμική ολίσθηση με την προϋπόθεση ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών ζυγίσεων είναι σταθερό. Το είδος του κύκλου ζύγισης και ο ελάχιστος αριθμός των κύκλων εξαρτάται από την επιδιωκόμενη αβεβαιότητα της διακρίβωσης. Με την συγκριτική ζύγιση προσδιορίζεται η μάζα ενός αντικειμένου από την μάζα γνωστού προτύπου βάρους αναφοράς και την διαφορά ένδειξης του ζυγού που χρησιμοποιείται. Η σύγκριση των δυνάμεων που ασκούνται στον ζυγό από το αντικείμενο και το πρότυπο αναφοράς έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη μιας διαφοράς δύναμης $\Delta m_w \cdot g$ που δίνεται από την σχέση

$$[m_t(1-\rho_a/\rho_t)-m_s(1-\rho_a/\rho_r)]g=\Delta m_w\, g \qquad (5)$$

όπου $m_t$, $\rho_t$ και $m_r$, $\rho_r$ είναι οι μάζες και οι πυκνότητες του προτύπου δοκιμής και αναφοράς αντίστοιχα και $\rho_a$ η πυκνότητα του αέρα. Η μάζα του αγνώστου αντικειμένου, με χρήση της ευαισθησίας S και της ένδειξης $\Delta I_w$ του ζυγού, γράφεται ως

$$m_t = m_r\left(\frac{1-\rho_a/\rho_r}{1-\rho_a/\rho_t}\right)+\frac{\Delta I_w}{S(1-\rho_a/\rho_t)} \qquad (6)$$

που προσεγγιστικά δίνεται από την σχέση

$$m_t = m_r\left(1+\frac{\rho_a(\rho_r-\rho_t)}{\rho_r\rho_t}\right)+\frac{\Delta I_w}{S} \qquad (7)$$

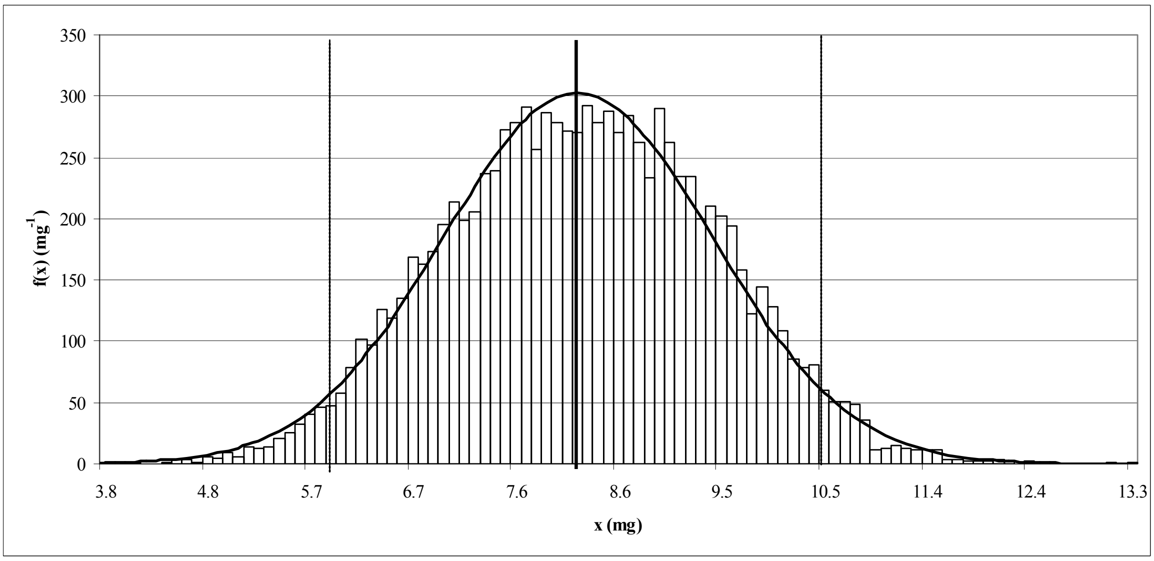
Πίνακας 1. Τιμές και τυπικές αβεβαιότητες των μεταβλητών εισόδου του μοντέλου διακρίβωσης μάζας.

| **$X_i$** | **PDF** | **$x_i$** | **$u(x_i)$** |
|---|---|---|---|
| $m_r$ | Κανονική | 1000,003 g | 0,75 mg |
| $\rho_r$ | Ορθογωνική | 7900 kg/m$^3$ | 14 kg/m$^3$ |
| $\rho_t$ | Ορθογωνική | 7950 kg/m$^3$ | 40 kg/m$^3$ |
| $\rho_a$ | Κανονική | 1,187 kg/m$^3$ | 0,001 kg/m$^3$ |
| S | Κανονική | 10 div./mg | 0,6 div./mg |
| $\Delta I_w$ | Κανονική | 61 div. | 1,1 div. |

Ο όρος $\dfrac{\rho_a(\rho_s-\rho_t)}{\rho_s\rho_t}$ συνήθως συμβολίζεται με **B** και αποτελεί την λεγόμενη διόρθωση λόγω άνωσης του αέρα. Η πυκνότητα του αέρα υπολογίζεται από την μέτρηση της θερμοκρασίας T, σχετικής υγρασίας %r.h. και ατμοσφαιρικής πίεσης p [8]. Στον πίνακα 1. παρουσιάζονται οι τιμές, αβεβαιότητες και οι κατανομές πυκνότητας πιθανοτήτων των αντίστοιχων μεταβλητών εισόδου που θα χρησιμοποιηθούν στην συγκριτική αξιολόγηση των δύο μεθόδων (κλασσική και υπολογιστική) εκτίμησης της μετρητικής αβεβαιότητας της μάζας σύμφωνα με το μοντέλο της σχέσης (7). Στον πίνακα 2 φαίνονται οι συντελεστές ευαισθησίας που χρησιμοποιούνται στον νόμο διάδοσης των αβεβαιοτήτων ενώ στον πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα στοιχεία των πινάκων 1. και 2. Επιπλέον στον ίδιο πίνακα παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου Monte-Carlo, δεδομένων των pdf των μεταβλητών του μοντέλου (πίνακας 1.). Τέλος, στο σχήμα 5 παρουσιάζονται γραφικά τα αποτελέσματα εκτίμησης της αβεβαιότητας διακρίβωσης μάζας. Το σχήμα περιέχει προσεγγίσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανοτήτων όπως προέκυψε από την εφαρμογή των δύο μεθοδολογιών καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% που ταυτίζονται για τις δυο μεθόδους.

Πίνακας 2. Συντελεστές Ευαισθησίας του ΝΔΑ

| $\mathbf{X_i}$ | $\dfrac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X_i}}$ | $\left.\dfrac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X_i}}\right\vert_{\mathbf{x_i}}$ |
|---|---|---|
| $m_r$ | 1 | 1 |
| $\rho_r$ | $\dfrac{m_r \rho_a}{\rho_r^2}$ | $1{,}9\text{x}10^{-8}$ m$^3$ |
| $\rho_t$ | $-\dfrac{m_r \rho_a}{\rho_t^2}$ | $-1{,}9\text{x}10^{-8}$ m$^3$ |
| $\rho_a$ | $m_s \dfrac{\rho_s - \rho_t}{\rho_s \rho_t}$ | $-8{,}0\text{x}10^{-7}$ m$^3$ |
| S | $-\dfrac{\Delta I_w}{S^2}$ | -0,61 mg$^2$/div. |
| $\Delta I_w$ | $\dfrac{1}{S}$ | 0,1 mg/div. |




Σχήμα 5. Προσεγγίσεις της PDF για το μετρούμενη μέγεθος $m_\tau$, όπως προέκυψε από α) τον ΝΔΑ, (συμπαγής γραμμή) και β)την προσομοίωση MC (ιστόγραμμα). Η μεσαία κάθετη γραμμή αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή της μάζας ενώ οι κάθετες γραμμές οριοθετούν το διάστημα εμπιστοσύνης.

Πίνακας 3. Συγκριτική αποτίμηση αποτελεσμάτων διακρίβωσης μάζας με τον ΝΔΑ και προσομοίωση MC

| Μέθοδος Υπολογισμού | Τιμή Μάζας (mg) | Τυπική Αβεβαιότητα (mg) | 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης (mg) |
|---|---|---|---|
| Κλασσική- ΝΔΑ | 1 kg +8,2 mg | 1,1 6 | 5,9 3 - 10,4 7 |
| Υπολογιστική-MC | 1 kg +8,2 mg | 1,2 4 | 5,9 3 - 10,4 7 |

## 5. Συμπεράσματα

Σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε μια παραθυρική εφαρμογή για την εκτίμηση της αβεβαιότητας με τη μέθοδο προσομοίωσης Monte-Carlo. Η εφαρμογή περιλαμβάνει: εισαγωγή των εξισώσεων του μοντέλου, χαρακτηρισμό και αρχικοποίηση των παραμέτρων και μεταβλητών του μοντέλου, υπολογισμό της αβεβαιότητας και εμφάνιση των αποτελεσμάτων. Για τον έλεγχο της λειτουργικότητάς της εφαρμόστηκε στην εκτίμηση της αβεβαιότητας για τη μέτρηση της μάζας με τη μέθοδο της συγκριτικής ζύγισης και συγκρίναμε τα αποτελέσματα με αυτά της μεθόδου ΝΔΑ. Παρόλο που εμφανίζεται διαφορά στην τυπική αβεβαιότητα, η αναμενόμενη τιμή και το διάστημα εμπιστοσύνης ταυτίζονται. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς για τη συγκεκριμένη περίπτωση οι εξισώσεις που περιγράφουν τη μέθοδο είναι γραμμικές και οι κατανομές κανονικές και επομένως η εφαρμογή της ΝΔΑ δίνει αξιόπιστες εκτιμήσεις.

## 6. Βιβλιογραφία


1. ISO "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", 2nd ed. Geneva, Switzerland, (1995).
2. UKAS "*The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement*", Technical Report M3003, (1997).
3. B.N. Taylor and C.E. Kuyatt, "*Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*", Technical Report TN1297, (1994).
4. W. Kessel, "*Measurement Uncertainty According to ISO/BIPM-GUM*", Thermochimica Acta **382**, 1-16 (2002).
5. I. Lira, "*Evaluating the Measurement Uncertainty*" IOP Publishing Bristol, (2002).
6. M.G. Cox, M.P. Dainton, P.M. Harris, "*Uncertainty and Statistical Modelling*", Software Support for Metrology Best Practice Guide No. 6, NPL (2002).
7. W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, "*Numerical Recipes in Fortran*", 2nd ed. Cambridge University Press (1992).
8. Schwartz, R. "*Guide to Mass Determination with High Accuracy*", PTB-MA-40 (1991).