

# Η ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΙΔΙΑΖΟΥΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Χ. ΜΗΤΣΑΣ, Γ. ΝΑΒΡΟΖΙΔΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΜΕΤΡΟΛΟΓΙΑΣ (ΕΙΜ), Δ/ΝΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ,  
ΘΕΣ/ΝΙΚΗ 57022

Email: [chris.mitsas@eim.org.gr](mailto:chris.mitsas@eim.org.gr)

**Περίληψη :** Παρουσιάζεται η μεθοδολογία εκτίμησης των παραμέτρων ενός διακριτού γραμμικού μοντέλου πολλών μεταβλητών βάσει του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων όταν οι διαθέσιμες μετρήσεις είναι με την μορφή διαφορών που προκύπτουν από την σύγκριση αντικειμένων με ίσες ονομαστικές τιμές. Η μέθοδος υπολογιστικά στηρίζεται στην ανάλυση του πίνακα σχεδιασμού κατά ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition) και παρέχει την βέλτιστη δυνατή λύση με το ελάχιστο μέτρο. Η σπουδαιότητα της μεθόδου έγκειται στο ότι ξεπερνά την αδυναμία αντιστροφής του πίνακα σχεδιασμού χωρίς την χρήση επιπλέον υποθέσεων για την στατιστική κατανομή των σφαλμάτων, σε σχέση με τα «κανονικά» ελάχιστα τετράγωνα, εκμεταλλευόμενη στο έπακρο την γεωμετρία των διανυσματικών χώρων των παραμέτρων και μετρήσεων. Η μέθοδος εφαρμόζεται στον προσδιορισμό των παραμέτρων και του πίνακα συνδιακύμανσης στο πρόβλημα των 3 συγκρίσεων με ένα πρότυπο αναφοράς.

## 1. Εισαγωγή

Η διακρίβωση ορίζεται ως το σύνολο των εργασιών που καθορίζουν, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, τη σχέση ανάμεσα στην τιμή ενός μεγέθους, όπως προκύπτει από την ένδειξη ενός μετρητικού οργάνου, και την αντίστοιχη τιμή που υλοποιείται μέσω ενός προτύπου αναφοράς. Από τον ορισμό γίνεται αντιληπτό ότι η έννοια της διακρίβωσης είναι συνυφασμένη με αυτή της συγκριτικής μέτρησης μεγεθών και ανάγεται γενικά στον προσδιορισμό  $n$  παραμέτρων από αριθμό  $m$  παρατηρήσεων, όπου συνήθως  $m > n$ . Όταν οι παρατηρήσεις ανήκουν στην ίδια στατιστική κατανομή και δεν είναι συσχετισμένες, η βέλτιστη εκτίμηση των  $n$  παραμέτρων προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος των «κανονικών» ελαχίστων τετραγώνων (OLS) και προσδιορίζονται οι μη-μεροληπτικοί εκτιμητές με ελάχιστη διακύμανση (Minimum Variance Unbiased Estimates -MVUE) [1]. Δυστυχώς η επίλυση του προβλήματος OLS στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι διαφορές μεταξύ αντικειμένων με ίδιες ονομαστικές τιμές δεν είναι εφικτή λόγω της φύσης του πίνακα σχεδιασμού του πειράματος. Η αδυναμία επίλυσης σε αυτή την περίπτωση πηγάζει από το ότι δεν υπάρχει μία τιμή αναφοράς σε σχέση με την οποία θα προσδιοριστούν οι άγνωστοι παράμετροι. Η αντιμετώπιση συνήθως γίνεται με την μέθοδο των παραγόντων Lagrange όπου η γνωστή τιμή της αναφοράς εισάγεται στο πρόβλημα ως περιορισμός [2]. Το πρόβλημα που ανακύπτει τότε είναι η μη ισότιμη χρήση της τιμής αναφοράς, αφού στον μεν προσδιορισμό των εκτιμητών θεωρείται μία παράμετρος χωρίς αβεβαιότητα ενώ στην εκτίμηση της αβεβαιότητάς των περιλαμβάνεται και η αβεβαιότητά της σύμφωνα με τους κανόνες του ISO “GUM” [3]. Επιπλέον, αν οι υποθέσεις που αφορούν στα στατιστικά χαρακτηριστικά των παρατηρήσεων δεν ικανοποιούνται αποδεικνύεται ότι οι εκτιμητές OLS των παραμέτρων δεν έχουν ελάχιστη διακύμανση [4]. Τότε με το θεώρημα Gauss-Markov η εύρεση του MVUE θα προκύψει από την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων [5].

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία μέθοδος επίλυσης του προβλήματος OLS που αφενός αντιμετωπίζει την αδυναμία επίλυσης και αφετέρου παράγει εκτιμητές με ελάχιστη διακύμανση. Οι εκτιμητές αυτοί είναι μεροληπτικοί αλλά αυτό δεν είναι ουσιαστικό αφού η μεροληψία τους αναιρείται από την χρήση της τιμής αναφοράς μέσα στην διαδικασία εκτίμησης. Η μέθοδος κάνει χρήση της ανάλυσης του πίνακα σχεδιασμού κατά ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition - SVD) [6,7] που εκμεταλλεύεται την ύπαρξη 4 θεμελιωδών διανυσματικών υποχώρων που συνθέτουν τους διανυσματικούς χώρους των παραμέτρων  $\mathbf{R}^n$ , και των μετρήσεων  $\mathbf{R}^m$ .

## 2. Οι 4 Θεμελιώδεις Υπόχωροι ενός Γραμμικού Μετασχηματισμού

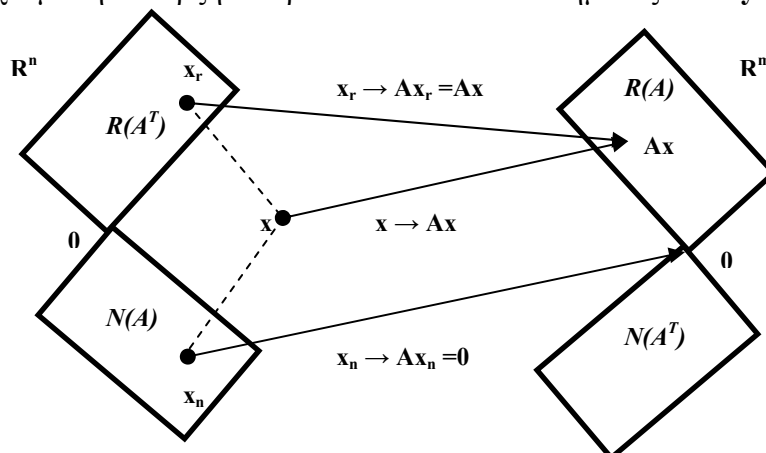
Κάθε  $m \times n$  πίνακας  $\mathbf{A}$  αναπαριστά ένα γραμμικό μετασχηματισμό  $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  και ορίζει 4 υποχώρους [8], τον:

- μηδενόχωρο του  $\mathbf{A}$ ,  $N(\mathbf{A})$ , που παράγεται από τις λύσεις της  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  και έχει διάσταση  $n - r$ , όπου  $r$  η τάξη στηλών (γραμμών) του  $\mathbf{A}$
- χώρο γραμμών του  $\mathbf{A}$ ,  $R(\mathbf{A}^T)$ , που παράγεται από τις γραμμές του  $\mathbf{A}$  και έχει διάσταση  $r$
- χώρο στηλών του  $\mathbf{A}$ ,  $R(\mathbf{A})$ , που παράγεται από τις στήλες του  $\mathbf{A}$ , δηλ. τις λύσεις της  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  και έχει διάσταση  $r$
- μηδενόχωρο του  $\mathbf{A}^T$ ,  $N(\mathbf{A}^T)$ , ή αριστερός μηδενόχωρος του  $\mathbf{A}$ , που παράγεται από τις λύσεις της  $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$  και έχει διάσταση  $m - r$

Οι παραπάνω υπόχωροι δεν είναι τυχαίοι. Ανά δύο αποτελούν ορθογώνια συμπληρώματα, και συνθέτουν εξολοκλήρου τους χώρους  $\mathbf{R}^n$  και  $\mathbf{R}^m$ , ισχύει δηλ.,

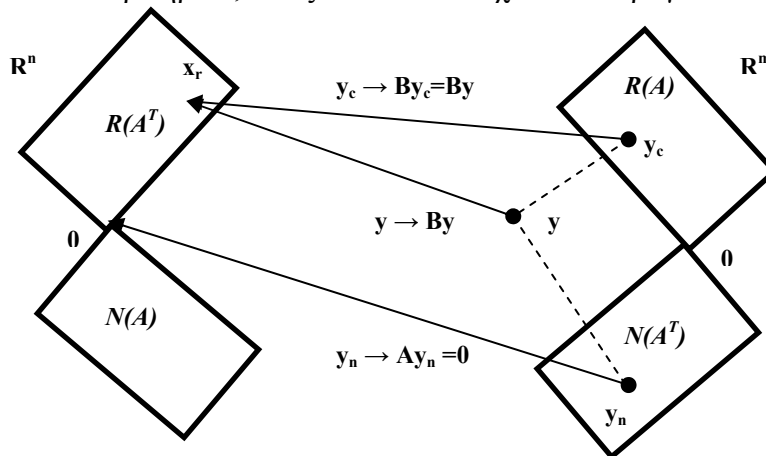
- $R(\mathbf{A}^T) \perp N(\mathbf{A})$  και  $R(\mathbf{A}^T) \oplus N(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^n$
- $R(\mathbf{A}) \perp N(\mathbf{A}^T)$  και  $R(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A}^T) = \mathbf{R}^m$

Στο σχήμα 1 αναπαριστάται η δράση του μετασχηματισμού  $\phi$  σε ένα τυχαίο διάνυσμα  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^n$ , που έχει μία συνιστώσα στον χώρο γραμμών,  $R(\mathbf{A}^T)$ , και μία στον μηδενόχωρο του  $\mathbf{A}$ ,  $N(\mathbf{A})$ , δηλ. ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι ελλειπός τάξης με  $r < n$ . Από το σχήμα φαίνεται ότι η δράση του μετασχηματισμού στο  $\mathbf{x}$  έχει ως αποτέλεσμα την απεικόνιση του  $\mathbf{x}_n$  στο μηδέν ( $\mathbf{Ax}_n = \mathbf{0}$ ) και του  $\mathbf{x}_r$  στο χώρο των στηλών ( $\mathbf{Ax}_r = \mathbf{Ax}$ ). Τότε οι πληροφορίες που περιέχονται στη συνιστώσα  $\mathbf{x}_n$  χάνονται μετά την απεικόνιση με συνέπεια την αδυναμία αντιστροφής του μετασχηματισμού αφού αυτό θα ισοδυναμούσε με την κατασκευή του  $N(\mathbf{A})$  από ένα μηδενικό διάνυσμα μόνο. Στην γλώσσα της άλγεβρας αυτό αντιστοιχεί με την ύπαρξη άπειρων λύσεων του συστήματος  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ .



Σχήμα 1. Η δομή των  $\mathbf{R}^n$  και  $\mathbf{R}^m$  και η δράση του γραμμικού μετασχηματισμού  $\mathbf{A}$  σε  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  (ευθύ πρόβλημα).

Αντίστοιχα, στο σχήμα 2 απεικονίζεται το λεγόμενο «αντίστροφο πρόβλημα». Εδώ ο πίνακας  $\mathbf{B}$  αναπαριστά τον μετασχηματισμό  $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  και ταυτίζεται με τον λεγόμενο ψευδο-αντίστροφο  $\mathbf{A}^+$  [8]. Συνήθως οι παρατηρήσεις είναι περισσότερες από τις παραμέτρους δηλ.,  $m > n$  και εάν  $N(\mathbf{A}^T) \neq 0$ , οι πληροφορίες που περιέχονται στη συνιστώσα  $\mathbf{y}_n$  απεικονίζονται στο μηδέν. Ο αντίστροφος αυτός μετασχηματισμός, αν είναι εφικτός ( $N(\mathbf{A}) = 0$ ), θα έχει ως αποτέλεσμα στην καλύτερη περίπτωση το διάνυσμα  $\mathbf{x}_r \in R(\mathbf{A}^T)$ . Αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση εύρεσης της βέλτιστης λύσης του συστήματος  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  βάσει κάποιου κριτηρίου, όπως αυτό των ελαχίστων τετραγώνων.



Σχήμα 2. Η δράση του γραμμικού μετασχηματισμού  $\mathbf{B}$  σε  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$  (αντίστροφο πρόβλημα).

### 3. Η Γεωμετρία των Ελαχίστων Τετραγώνων

Δοθέντος ενός γραμμικού μετρητικού μοντέλου

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

όπου ο πίνακας σχεδιασμού (design matrix)  $\mathbf{A}$  είναι  $m \times n$ , το διάνυσμα των παρατηρήσεων  $\mathbf{Y}$  είναι  $m \times 1$ , το διάνυσμα των παραμέτρων  $\mathbf{x}$  είναι  $n \times 1$  και το διάνυσμα των τυχαίων σφαλμάτων  $\boldsymbol{\varepsilon}$  είναι  $m \times 1$ , ο προσδιορισμός των παραμέτρων ανάγεται στην επίλυση ενός υπερπροσδιορισμένου γραμμικού συστήματος  $m$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους που γενικά είναι μη-συμβιβαστό. Γεωμετρικά, το μη-συμβιβαστό σύστημα σημαίνει ότι το  $\mathbf{Y}$  δεν ανήκει εξολοκλήρου στον χώρο των στηλών  $R(\mathbf{A})$  του  $\mathbf{A}$  και επομένως δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $\mathbf{A}$ . Το καλύτερο που μπορεί να επιτευχθεί είναι να βρεθεί ένα διάνυσμα  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in R(\mathbf{A})$ , που ελαχιστοποιεί το μήκος του διανύσματος της διαφοράς  $\|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|^2$ . Από την κατασκευή της η διαφορά  $\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$  ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $R(\mathbf{A})$ , δηλ. στον αριστερό μηδενοχώρο του  $\mathbf{A}$ ,  $N(\mathbf{A}^T)$ . Τότε θα έχουμε

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \quad (3)$$

Η σχέση αυτή είναι ένα  $n \times n$  σύστημα, και αποτελεί τις λεγόμενες «κανονικές εξισώσεις». Έστω  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n]$  όπου το  $\mathbf{a}_i$  είναι  $m \times 1$  στηλο-διανύσματα και το  $\hat{\mathbf{x}}^T = [x_1, \dots, x_n]$  γραμμο-διάνυσμα. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

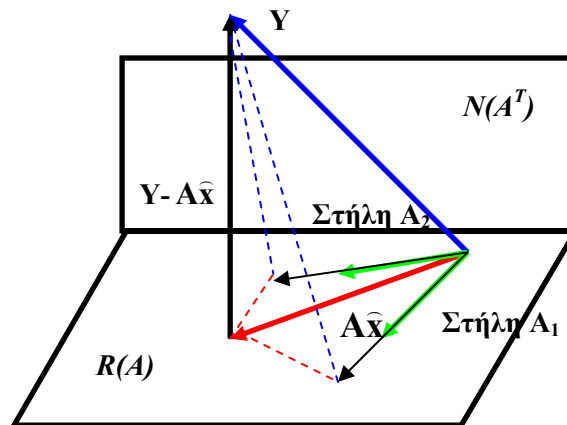
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= x_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1^T \mathbf{Y} \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_n^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= x_1 \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n^T \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3')$$

Οι «κανονικές εξισώσεις» λοιπόν προσδιορίζουν το διάνυσμα  $A\hat{x}$  του οποίου οι προβολές στις στήλες του πίνακα  $A$  να είναι ίσες με τις προβολές του  $Y$  σε αυτές. Στο σχήμα 3 απεικονίζεται η γεωμετρία των ελαχίστων τετραγώνων στην απλή περίπτωση  $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^3$ .

Η επίλυση γράφεται ως

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (4)$$

όπου  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ . Στην περίπτωση που ο μηδενολόγος  $N(A) = \emptyset$ , οι στήλες του  $A$  παράγουν τον χώρο  $R(A)$  και αν είναι και γραμμικώς ανεξάρτητες αποτελούν τα διανύσματα βάσης του. Τότε οι «κανονικές εξισώσεις» επιλύονται αφού ο συμμετρικός  $n \times n$  πίνακας  $A^T A$  είναι αντιστρέψιμος. Αν επιπλέον η βάση του υποχώρου  $R(A)$  είναι ορθογώνια τότε ο πίνακας  $A^T A$  είναι διαγώνιος και η αντιστροφή του είναι εύκολη. Μία τέτοια βάση για τον χώρο αυτό αποτελούν τα ιδιο-διανύσματα του πίνακα αυτού. Αντίθετα, αν ο μηδενολόγος  $N(A) \neq \emptyset$ , τότε οι στήλες του  $A$  είναι γραμμικώς εξαρτημένες, συνθήκη που καθιστά τον πίνακα  $A^T A$  μη-αντιστρέψιμο (ιδιάζων). Σε αυτή την περίπτωση η ανάλυση των ιδιζουσών τιμών (SVD) παράγει τον  $A^+$  που μπορεί να δώσει μία λύση  $x^*$  από το άπειρο πλήθος που υπάρχει με επιπλέον, αλλά όχι πάντοτε επιθυμητό, χαρακτηριστικό το ελάχιστο μέτρο  $\|x^*\| = \min\{\|x_i\| \mid x_i \in \mathbf{R}^n\}$ .



Σχήμα 3. Γεωμετρική αναπαράσταση των «κανονικών εξισώσεων» του γραμμικού συστήματος  $Y = Ax$

### 3. Ανάλυση Ιδιζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition)

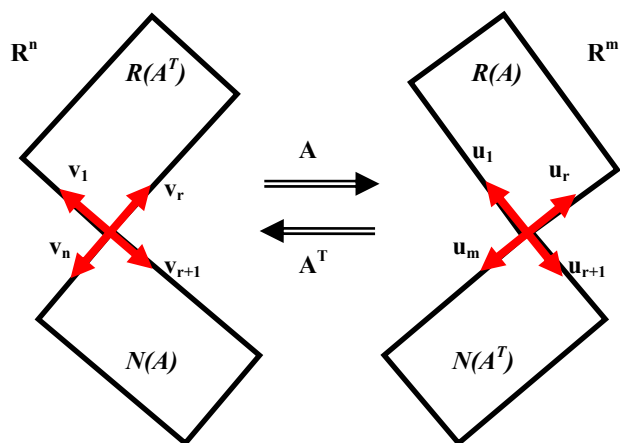
Η ανάλυση ιδιζουσών τιμών (SVD) είναι η φυσική επέκταση της διαγωνιοποίησης ενός συμμετρικού  $n \times n$  πίνακα που αναπαριστά τον μετασχηματισμό  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Πιο συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα [5]

Κάθε  $m \times n$  πίνακας  $A$  που αναπαριστά ένα γραμμικό μετασχηματισμό  $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  αναλύεται στην μορφή  $A = U\Sigma V^T$  όπου οι ορθογώνιοι πίνακες  $U$  και  $V$  είναι  $m \times m$  και  $n \times n$  αντίστοιχα, και ο διαγώνιος πίνακας  $m \times n$   $\Sigma$  έχει τα μη-αρνητικά στοιχεία της κεντρικής διαγωνίου του διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά και καταλαμβάνουν τις  $r$  πρώτες θέσεις στην διαγωνιά του, με  $r$  την τάξη του πίνακα  $A$ .

Οι στήλες των  $U$  και  $V$  απαρτίζονται από τα ιδιο-διανύσματα των  $AA^T$  και  $A^T A$  αντίστοιχα ενώ τα  $r$  διαγώνια στοιχεία του  $\Sigma$ , ονομάζονται ιδιάζουσες τιμές, και ισούνται με τις τετραγωνικές ρίζες των μη-μηδενικών ιδιο-τιμών του  $A^T A$  ( $AA^T$ ). Η SVD επομένως κατασκευάζει ορθογώνιες βάσεις για τους χώρους  $\mathbf{R}^m$  και  $\mathbf{R}^n$  και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε η ορθογωνιότητα να διατηρείται κατά την δράση του  $A$ , δηλ.,  $AV =$

UΣ. Οι στήλες των  $U$  και  $V$  παράγουν ορθογώνιες βάσεις για τους 4 θεμελιώδεις υπόχωρους, όπως φαίνεται στο σχήμα 4, ήτοι:

$$A = U\Sigma V^T = \left( \underbrace{u_1 \cdots u_r}_{\text{βάση } R(A)}, \underbrace{u_{r+1} \cdots u_m}_{\text{βάση } N(A^T)} \right) \begin{vmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{vmatrix} \left( \underbrace{v_1 \cdots v_r}_{\text{βάση } R(A^T)}, \underbrace{v_{r+1} \cdots v_n}_{\text{βάση } N(A)} \right)^T$$



Σχήμα 4. Οι θεμελιώδεις υπόχωροι και τα ορθοκανονικά βασικά τους διανύσματα, όπως κατασκευάζονται από την ανάλυση ιδιοζουσών τιμών (SVD).

Με τον φορμαλισμό της SVD το πρόβλημα εύρεσης του ψευδο-αντιστρόφου όταν ο μηδενοχώρος  $N(A) \neq \emptyset$  και προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} \|Y - Ax^*\| &= \|Y - U\Sigma V^T x^*\| = \|U(U^T Y) - U(\Sigma V^T x^*)\| = \|U(U^T Y - \Sigma V^T x^*)\| \\ \|Y - Ax^*\| &= \|\Sigma b - c\| \end{aligned} \quad (5)$$

όπου  $x^*$  είναι η λύση που προκύπτει και έγινε χρήση της ιδιότητας  $\|U\| = 1$  αφού ο  $U$  είναι ορθογώνιος πίνακας. Το πρόβλημα επομένως ανάγεται στην εύρεση των προβολών,  $b = V^T x^*$ , στον χώρο  $R(A^T)$  που παράγουν απεικονίσεις στον χώρο  $R(A)$  που είναι οι πλησιέστερες στις προβολές  $c = U^T Y$  στον ίδιο χώρο. Η ανάλυση SVD με μία «γοργή κίνηση» απέφυγε το μέρος του προβλήματος που ενδεχομένως το καθιστά ιδιάζων, δηλ. τις προβολές του  $x^*$  στο μηδενοχώρο  $N(A)$  και ταυτόχρονα ελάττωσε τις διαστάσεις του πεδίου τιμών του  $A$ , προβάλλοντας το  $Y$  στον χώρο στηλών  $R(A)$ , ώστε να μπορεί να επιλυθεί το σύστημα βέλτιστα με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Αν τα μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία του  $\Sigma$  είναι  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  και οι συνιστώσες του  $b$  είναι  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  τότε το διάνυσμα της σχέσης (5) γράφεται ως

$$\mathbf{\Sigma b - c} = \begin{pmatrix} \sigma_1 b_1 - c_1 \\ \vdots \\ \sigma_r b_r - c_r \\ -c_{r+1} \\ -c_{r+2} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \quad \text{του οποίου το μέτρο είναι ελάχιστο όταν } b_i = \frac{c_i}{\sigma_i}, i = 1, \dots, r \text{ όπου οι}$$

συνιστώσες  $b_{r+1}, \dots, b_n$  μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή αφού δεν επιδρούν καθόλου στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης. Αν αυθαίρετα επιλεγεί η τιμή τους ίση με το μηδέν τότε η λύση αποτελεί το διάνυσμα με το ελάχιστο μήκος (minimum norm solution). Η παραπάνω επιλογή γίνεται μετά την αντιστροφή του διαγώνιου πίνακα  $\Sigma$  αν τα τελευταία  $m-r$  διαγώνια στοιχεία του αντιστρόφου τεθούν ίσα με μηδέν. Ο πίνακας,  $\Sigma^+$ , που προκύπτει αποκαλείται ο γενικευμένος αντίστροφος κατά Moore-Penrose [6] και η επίλυση γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma b} = \mathbf{c} &\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{V}^T \mathbf{x}^*) = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ (\mathbf{U}^T \mathbf{Y}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+ \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (6)$$

όπου  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T$  είναι ο ψευδο-αντίστροφος του  $\mathbf{A}$ .

Η σχέση (6) αποτελεί μία «λύση» του προβλήματος αλλά δεν είναι υποχρεωτικά η επιθυμητή λύση δεδομένου ότι οι συνιστώσες του  $\mathbf{x}$  που ανήκουν στον μηδενικό χώρο  $N(\mathbf{A})$  δεν περιλαμβάνονται σε αυτή. Στα προβλήματα συγκριτικής μέτρησης με ένα πρότυπο αναφοράς ο μηδενικός χώρος  $N(\mathbf{A})$  είναι πάντα μονοδιάστατος ( $\text{rank}(\mathbf{A}) = n-1$ ). Επομένως, το μέρος της λύσης που δεν περιλαμβάνεται στο αποτέλεσμα της SVD είναι πολλαπλάσιο του βασικού διανύσματος αυτού του χώρου, δηλ., αν το βασικό διάνυσμα του μηδενικού χώρου  $N(\mathbf{A})$  είναι  $\mathbf{v}_0$ , τότε η πλήρης λύση θα είναι η  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* + d \mathbf{v}_0$  όπου  $d$  ένας συντελεστής. Ο προσδιορισμός του  $d$  μπορεί να γίνει αν ο πίνακας  $\mathbf{\Sigma}^+$  εξαναγκασθεί σε μη-μηδενική κεντρική διαγώνιο ώστε στην τελική λύση να συμπεριληφθεί η συνιστώσα του μηδενικού χώρου  $N(\mathbf{A})$ . Το παραπάνω αποτελεί ένα είδος κανονικοποίησης (regularization) η οποία εφαρμόζεται στα λεγόμενα «αντίστροφα προβλήματα» με σκοπό την χρήση προγενέστερης πληροφορίας [9]. Τότε η σχέση (6) γράφεται

$$\mathbf{\Sigma}(\lambda) \mathbf{b} = \mathbf{c} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+(\lambda) (\mathbf{U}^T \mathbf{Y}) \quad (6')$$

Επισημαίνοντας ότι το  $\hat{\mathbf{x}}$  είναι η αναμενόμενη λύση όπως θα προέκυπτε από την επίλυση των κανονικών εξισώσεων, αν αυτό ήταν εφικτό η σχέση (6') γίνεται

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_R \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_0) \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_{n-1}^{-1} & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_m)^T \mathbf{Y}$$

Μετά από αρκετή άλγεβρα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* + \frac{\mathbf{u}_0^T \mathbf{Y}}{\lambda \|\mathbf{u}_0\|^2} \mathbf{v}_0 \quad (7)$$

που είναι της ζητούμενης μορφής. Δεδομένου ότι η παράμετρος  $x_R$  είναι γνωστή, μπορεί να προσδιορισθεί το  $\lambda$  και η πλήρης λύση προκύπτει ως



$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* - \mathbf{v}_o(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_R) \quad (7')$$

#### 4. Αβεβαιότητα- Ο Πίνακας Συνδιακύμανσης

Μέχρι αυτό το σημείο η εύρεση των βέλτιστων παραμέτρων του γραμμικού μοντέλου (1) αντιμετωπίστηκε ως μία γεωμετρική κατασκευή που ταυτίζεται με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων που τυχαίνει να έχει και στατιστική ερμηνεία. Σύμφωνα με την σχέση (1) ισχύει ότι  $\|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|^2 = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})$ , δηλ. η βέλτιστη λύση είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , ή αντίστοιχα που μεγιστοποιεί την πιθανότητα οι εκτιμώμενοι παράμετροι να είναι οι βέλτιστοι βάσει των παρατηρήσεων (maximum likelihood principle) [1]. Στα πλαίσια του προβλήματος OLS τα σφάλματα  $\boldsymbol{\varepsilon}$  είναι ανεξάρτητα και ισοδύναμα κατανομημένα (i.i.d.) και ακολουθούν κανονική κατανομή  $N(0, \sigma^2)$ . Εξυπακούεται ότι και οι μετρήσεις  $\mathbf{Y}$  θα έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά που μέσω του πίνακα  $\mathbf{A}$  διαδίδονται και στις εκτιμήσεις των παραμέτρων του προβλήματος.

Η εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας παράγει εκτιμητή  $\mathbf{x}^*$  η αναμενόμενη τιμή του οποίου είναι μεροληπτική αφού:  $\mathbf{E}(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}$ . Η κανονικοποίηση του αποτελέσματος μέσω της (7) όμως έχει ως αποτέλεσμα η τελική εκτίμηση να είναι αμερόληπτη. Η διακύμανση των μετρήσεων γράφεται ως

$$\mathbf{var}(\mathbf{Y}) = \mathbf{E}\{[\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})][\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})]^T\}$$

όπου και δεδομένου του μοντέλου (1), η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\mathbf{var}(\mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \mathbf{I}_{m \times m} \sigma^2 \quad (8)$$

όπου  $\mathbf{I}_{m \times m}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Από την (6) και από τον νόμο διάδοσης αβεβαιοτήτων [1] προκύπτει ο πίνακας συνδιακύμανσης (covariance matrix) του  $\mathbf{x}^*$  ως

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(\mathbf{x}^*) &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V}(\mathbf{Y}) [(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T]^T = \\ &= \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

δηλ., ο παράγοντας  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$  μεταφέρει την αβεβαιότητα των μετρήσεων στις εκτιμώμενες παραμέτρους του προβλήματος με την προϋπόθεση ότι η αντιστροφή είναι εφικτή. Στις περιπτώσεις συγκριτικών μετρήσεων όπου η αντιστροφή δεν είναι εφικτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο φορμαλισμός της SVD για τον προσδιορισμό του πίνακα συνδιακύμανσης οπότε η σχέση (9) γίνεται

$$\mathbf{cov}(\mathbf{x}^*) = \sigma^2 [(\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T)]^{-1} = \sigma^2 [\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T]^{-1}$$

και λόγω των ιδιοτήτων των πινάκων  $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$  και  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ , προκύπτει ότι

$$\mathbf{cov}(\mathbf{x}^*) = \sigma^2 \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\mathbf{V}^T \quad (10)$$

όπου ο  $\boldsymbol{\Sigma}^{-2}$  είναι  $n \times n$  και έχει στην διαγώνιο  $1/\sigma_i^2$  για  $i \leq r < n$  και 0 για  $i > r$ . Η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω γίνεται αν θεωρηθεί ότι η σχέση (8) αναπαριστά μία  $m$ -διάστατη υπερ-σφαίρα, και αποτελεί ένα νέφος αβεβαιότητας που συνοδεύει το διάνυσμα των μετρήσεων  $\mathbf{Y}$ . Μέσω των περιστροφών που επιφέρει η ανάλυση SVD (η σχέση (10)) είναι ένας μετασχηματισμός ομοιότητας από την βάση αυτών στην αρχική στην οποία είναι εκφρασμένο το πρόβλημα) η υπερ-σφαίρα προβάλλεται στο χώρο των στηλών  $R(\mathbf{A})$ , επιμηκύνεται στους άξονες που ορίζονται από τα βασικά του διανύσματα σύμφωνα με τις ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_i$ , και απεικονίζεται στον χώρο  $R(\mathbf{A}^T)$  ως ένα  $r$ -διάστατο ελλειψοειδές με τους κύριους άξονες στις διευθύνσεις των βασικών διανυσμάτων αυτού του χώρου. Στην συνέχεια η έλλειψη τοποθετείται στον χώρο  $\mathbf{R}^n$ .

Ο υπολογισμός του πίνακα συνδιακύμανσης της αναμενόμενης λύσης του προβλήματος  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* + d \mathbf{v}_0$ , γίνεται εν συνεχεία με εφαρμογή του νόμου διάδοσης των αβεβαιοτήτων δεδομένου ότι

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Z} \mathbf{x}^* + x_R \mathbf{v}_0 \quad (11)$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{Z}$  δείχνει τον τρόπο συνδυασμού των  $x_1^*, \dots, x_n^*$  ώστε να προκύψει η ζητούμενη εκτίμηση. Με λίγη άλγεβρα προκύπτει ο πίνακας συνδιακύμανσης ως

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{x}}) = E(\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}^T) = \mathbf{Z} \text{cov}(\mathbf{x}^*) \mathbf{Z}^T + \mathbf{u}^2 (m_r) \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0^T \quad (12)$$

## 5. Εφαρμογή: το Πρόβλημα των 3 Συγκρίσεων

Το πρόβλημα έγκειται στον προσδιορισμό της τιμής δύο αγνώστων αντικειμένων από συγκρίσεις με ένα πρότυπο αναφοράς και μεταξύ τους, αποτελεί δε το απλούστερο υπεράριθμο σχήμα συγκριτικών μετρήσεων για αυτό τον προσδιορισμό. Στον προσδιορισμό Μάζας το πρόβλημα αποτυπώνεται με μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_R \\ m_1 \\ m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} \quad (13)$$

όπου  $m_R$  η μάζα του προτύπου αναφοράς,  $m_1$  και  $m_2$  οι άγνωστες τιμές και  $y_1, y_2, y_3$  τα αποτελέσματα των συγκριτικών μετρήσεων. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι για τον προσδιορισμό της μάζας στις πρωτογενείς μετρήσεις αποδίδεται η μονάδα της μάζας μέσω του προσδιορισμού της ευαισθησίας του συγκριτή και διορθώνονται για την διαφορά άνωσης που ασκείται στα συγκρινόμενα αντικείμενα [10]. Παρακάτω θα θεωρηθεί ότι στα αποτελέσματα έχουν γίνει οι απαραίτητες διορθώσεις και ότι οι ενδείξεις είναι διαφορές μάζας χωρίς να ληφθούν υπόψη οι προφανείς αλλά αμελητέες συνδιακυμάνσεις που εισάγονται από αυτές.

Ο συγκεκριμένος πίνακας  $\mathbf{A}$ , παρόλο που είναι τετραγωνικός, είναι ελλειπύς τάξης λόγω της φύσης του προβλήματος, δηλ. της συγκριτική μέτρηση. Αυτό το γεγονός καθιστά τον  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  μη-αντιστρέψιμο και η κλασική αντιμετώπιση θα ήταν η χρήση περιορισμών στις κανονικές εξισώσεις μέσω συντελεστών Lagrange [11]. Η εφαρμογή της SVD στο πρόβλημα γίνεται μέσω της αντίστοιχης συνάρτησης του MATLAB [12], και παράγει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ο αριθμός των μη-μηδενικών ιδιζουσών τιμών είναι και η τάξη του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Η λύση του προβλήματος μέσω του ψευδο-αντιστρόφου  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T$  και των μετρήσεων

$$\mathbf{y}^T = [-54,5 \ 20,1 \ 101,4] \ (\mu\text{g})$$

δίνεται ως



$$\begin{pmatrix} m_R^* \\ m_1^* \\ m_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -54,5 \\ 20,1 \\ 101,4 \end{pmatrix} (\mu\text{g}) = \begin{pmatrix} -11,4 \\ 52,0 \\ -40,5 \end{pmatrix} (\mu\text{g})$$

Η τιμή του προτύπου αναφοράς είναι 1 kg +10 μg με αβεβαιότητα  $U(k=2) = 100 \mu\text{g}$ . Η πλήρης λύση θα προκύψει από την σχέση (7) ως

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -11,4 \\ 52,0 \\ -40,5 \end{pmatrix} - \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} (-11,4 - 10) = \begin{pmatrix} 10 \\ 73,4 \\ -19,1 \end{pmatrix} (\mu\text{g})$$

Ο πίνακας συνδιακύμανσης υπολογίζεται από την σχέση (10) ως

$$\text{cov}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{15,5^2}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

και ο συνολικός πίνακας συνδιακύμανσης θα είναι

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{15,5^2}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 50^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 50^2 & 50^2 & 50^2 \\ 50^2 & 50^2 + \frac{2 \cdot 15,5^2}{3} & 50^2 + \frac{15,5^2}{3} \\ 50^2 & 50^2 + \frac{15,5^2}{3} & 50^2 + \frac{2 \cdot 15,5^2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 & 2500 & 2500 \\ 2500 & 2659,4 & 2579,7 \\ 2500 & 2579,7 & 2659,4 \end{pmatrix}$$

Η εκτίμηση της διακύμανσης  $\sigma_0^2$  έγινε από την σχέση [1]

$$s^2 = \frac{\hat{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{y}}}{\mathbf{v}} \quad (13)$$

όπου  $\mathbf{v}$  ο αριθμός βαθμών ελευθερίας. Το τελικό αποτέλεσμα της σύγκρισης θα είναι

$$\begin{pmatrix} m_R \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = 1 \text{ kg} + \begin{pmatrix} 10 \\ 73,4 \\ -19,1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 100 \\ 103 \\ 103 \end{pmatrix} (\mu\text{g})$$

σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Τα μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα συνδιακύμανσης έχουν σημασία όταν χρησιμοποιηθούν συνδυασμοί των παραπάνω βαρών.

## 6. Συμπεράσματα

Παρουσιάστηκε η ανάκτηση της βέλτιστης «εικόνας» μιας φυσικής διεργασίας από ένα σύνολο οργανωμένων δεδομένων μέσω της επίλυσης του προβλήματος των «κανονικών» ελαχίστων τετραγώνων (OLS) με την μεθοδολογία της ανάλυσης των ιδιζουσών τιμών (SVD). Τα χαρακτηριστικά της μεθοδολογίας είναι:

- η παράκαμψη των δύο σημαντικότερων δυσκολιών του «κλασσικού» προβλήματος OLS στην ανάλυση συγκριτικών μετρήσεων, ήτοι την αδυναμία αντιστροφής του πίνακα σχεδιασμού λόγω ελλιπούς τάξης και της ατελούς αναπαράστασης του πίνακα συνδιακύμανσης.
- ο προσδιορισμός μεροληπτικών εκτιμητών για τις ζητούμενες παραμέτρους που όμως κρίνεται επουσιώδης αφού η μεροληψία τους αναιρείται από την χρήση της τιμής αναφοράς ως οριακή συνθήκη ή προγενέστερης πληροφορίας κατά την διαδικασία της εκτίμησης.
- η γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος και η απεικόνιση των δεδομένων και των ζητούμενων παραμέτρων στους 4 θεμελιώδεις διανυσματικούς υποχώρους στους οποίους αναπαριστάται η διεργασία.
- η δυνατότητα βελτίωσης της εκτίμησης με την ενσωμάτωση νέας πληροφορίας σε σχέση με το μετρητικό σύστημα μέσω αναδρομικών σχέσεων μεταξύ τυχαίων μεταβλητών και χρήσης Bayesian μεθόδων ( recursive linear estimation).

## 7. Βιβλιογραφία

1. R.J. Barlow, *“Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences”*, Wiley 1989.
2. C.G. Hughes and H.A. Musk, *“A Least Square Method for Analysis of Pair Comparison Measurements”*, Metrologia, **8**,(1972)109.
3. ISO *“Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements”*, 2<sup>nd</sup> ed., 1995.
4. W. Bich, *“Variances, Covariances and Restraints in Mass Metrology”*, Metrologia, **27**, (1990) 111.
5. D.G. Luenberger, *“Optimization by Vector Space Methods”*, Wiley 1969.
6. G. Golub, C. Van Loan, *“Matrix Computations”*, 3<sup>rd</sup> ed. Johns Hopkins University Press 1996.
7. C. Lawson, R. Hanson, *“Solving Least Squares Problems”*, Classics in Applied Mathematics 15, SIAM 1995.
8. G. Strang, *«Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές»*, 6<sup>η</sup> Εκδ., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2003.
9. L. Tenorio, *“Statistical Regularization of Inverse Problems”*, SIAM Rev. **43**, (2001) 347.
10. X. Μήτσας, *«Προσδιορισμός Μάζας και Διακρίβωση Βαρών»*, Τεχνική Οδηγία EIM MM-MA-02<sup>α</sup>, 2003.
11. R. Schwartz, *“Guide to mass determination with high accuracy”*, PTB-Bericht MA-40, 1995.
12. MATLAB v.13, 2004.